

Definujte permutaci.
 Definujte znaménko permutace.
 Definujte determinant.
 Definujte adjungovanou matici.
 Definujte Laplaceovu matici.
 Definujte polynom nad tělesem.
 Definujte kořen polynomu a jeho násobnost.
 Definujte algebraicky uzavřené těleso.
 Definujte Vandermondovu matici.
 Definujte vlastní číslo a vlastní vektor lineárního zobrazení.
 Definujte vlastní číslo a vlastní vektor matice.
 Definujte charakteristický polynom.
 Definujte algebraickou násobnost vlastního čísla.
 Definujte geometrickou násobnost vlastního čísla.
 Definujte podobné matice.
 Definujte diagonalizovatelnou matici.
 Definujte Jordanův blok.
 Definujte Jordanův normální tvar matice.
 Definujte zobecněný vlastní vektor.
 Definujte hermitovskou matici.
 Definujte unitární matici.
 Definujte skalární součin pro vektorové prostory nad komplexními čísly.
 Definujte normu spojenou se skalárním součinem.
 Definujte kolmé vektory.
 Definujte ortonormální bázi.
 Definujte Fourierovy koeficienty.
 Definujte kolmou projekci.
 Definujte isometrii.
 Definujte ortogonální doplněk.
 Definujte Gramovu matici.
 Definujte pozitivně definitní matici.
 Definujte Choleského rozklad matice.
 Definujte bilineární formu.
 Definujte kvadratickou formu.

Definujte matici bilineární formy vzhledem k bázi.
 Definujte analytické vyjádření bilineární formy vůči standardní bázi.
 Definujte signaturu formy.
 Definujte polární bázi.
 Vyslovte a dokažte větu o linearitě determinantu (8/10).
 Vyslovte a dokažte větu o determinantu součinu dvou matic (6/12).
 Vyslovte a dokažte větu o Laplaceově rozvoji determinantu (8/10).
 Uveďte a dokažte Cramerovo pravidlo pro řešení soustav přes determinanty (8/10).
 Vyslovte a dokažte větu o adjungované matici (8/10).
 Vyslovte a dokažte větu o počtu koster grafu (8/14).
 Vyslovte a dokažte malou Fermatovu větu (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o Vandermondově matici (6/10).
 Uveďte a dokažte správnost Lagrangeovy interpolace (8/10).
 Vyslovte a dokažte pozorování o podprostoru vlastních vektorů (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o lineární nezávislosti vlastních vektorů (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o kořenech charakteristického polynomu matice (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o konstrukci matice s předepsaným charakteristickým polynomem (8/10).
 Vyslovte a dokažte pozorování o hodnotách tří koeficientů charakteristického polynomu matice (10/12).
 Vyslovte a dokažte větu o Geršgorinových kruzích (8/10).
 Uveďte a dokažte Cayleyovu–Hamiltonovu větu (8/14).
 Uveďte a dokažte dvě pozorování a související důsledky o násobnostech vlastních čísel podobných matic (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o vztahu geometrické a algebraické násobnosti vlastního čísla (6/10).
 Uveďte a dokažte nezbytnou a postačující podmínku, kdy je matice diagonalizovatelná (6/8).
 Uveďte a dokažte tvrzení o zobecněných vlastních vektorech (8/8).
 Vyslovte a dokažte větu o diagonalizaci speciálních komplexních matic (6/14).
 Vyslovte a dokažte Cauchyovu–Schwarzovu nerovnost (6/10).
 Vyslovte a dokažte vztah mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem (8/8).
 Uveďte a dokažte trojúhelníkovou nerovnost (6/10).
 Vyslovte a dokažte pozorování o navzájem kolmých vektorech (6/8).
 Vyslovte a dokažte tvrzení o Fourierových koeficientech (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o výpočtu skalárního součinu z Fourierových koeficientů (8/10).
 Vyslovte a dokažte tvrzení o kolmé projekci a normě (8/10).
 Uveďte a dokažte správnost Gramovy–Schmidtovy ortonormalizace (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o izometrii a normě (6/10).
 Vyslovte a dokažte větu o charakterizaci izometrie pomocí její matice (8/10).
 Vyslovte a dokažte větu o ortogonalitě a prostorech určených maticí (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o ortogonálním doplňku, mj. o jeho dimenzi (6/12).
 Vyslovte a dokažte větu o skalárním součinu dvou vektorů a Gramově matici (8/8).
 Uveďte a dokažte tři pozorování o vlastnostech pozitivně definitních matic vzhledem k maticovým operacím (6/9).
 Vyslovte a dokažte tvrzení o pozitivní definitnosti blokové matice (8/8).
 Vyslovte a dokažte větu o třech ekvivalentních podmínkách pro pozitivně definitní matice (6/9).
 Uveďte a dokažte větu o Choleského rozkladu včetně správnosti algoritmu pro výpočet (10/8).

Vyslovte a dokažte větu o rekurentní podmínce pro pozitivně definitní matice (10/8).

Vyslovte a dokažte větu o pozitivně definitních maticích a determinantech (8/10).

Vyslovte a dokažte větu o diagonalizovatelnosti matic forem (8/14).

Uveďte a dokažte Sylvesterův zákon setrvačnosti — o diagonalizaci kvadratických forem (10/14).

Vyslovte a dokažte větu o počtu přímek svírajících stejný úhel (6/8).

Přehledově sepište, co víte o výpočtu determinantů (14). Mimo jiné zdefinujte determinant matice libovolného řádu pomocí permutací (2) i pomocí Laplaceova rozvoje (2) a запиšte vztahy, které pro něj platí vzhledem k maticovým operacím (5).

Přehledově sepište, co víte o aplikacích determinantů (12). Mimo jiné zdefinujte adjungovanou matici (2) a zformulujte Cramerovo pravidlo (2) Cayleyovu–Hamiltonovu větu (3).

Přehledově sepište, co víte o výpočtu počtu koster grafu pomocí determinantů (10). Mimo jiné uveďte rekurenci pro počet koster (2), zdefinujte Laplaceovu matici multigrafu (2) a uveďte příslušnou větu (2).

Přehledově sepište, co víte o polynomech, jejich vlastnostech a aplikacích (8). Mimo jiné zdefinujte Vandermondovu matici (2), uveďte její užití a popište Lagrangeovu interpolaci (3).

Přehledově sepište, co víte o vlastních číslech a vlastních vektorech matic (12). Mimo jiné je nadefinujte i pro lineární zobrazení (2), zavedte jejich možné násobnosti (4) a popište algebraické vlastnosti množin vlastních vektorů (3).

Přehledově sepište, co víte o charakteristickém polynomu (10). Mimo jiné charakteristický polynom nadefinujte (2), uveďte jeho vztah k vlastním číslům (2) a vyjádřete některé jeho koeficienty (4).

Přehledově sepište, co víte o podobných maticích a diagonalizaci (12). Mimo jiné podobnost formálně nadefinujte (2), uveďte vlastnosti podobných matic (3) a také podmínky na diagonalizovatelnost (3).

Přehledově sepište, co víte o speciálních komplexních maticích (10). Mimo jiné je nadefinujte (2), uveďte jejich základní vlastnosti (2), souvislost se skalárním součinem (1) a použití při diagonalizaci (2).

Přehledově sepište, co víte o skalárním součinu a související normě (12). Mimo jiné skalární součin i normu axiomaticky nadefinujte (3+1) a uveďte jeho vlastnosti (2) včetně Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti (2).

Přehledově sepište, co víte o ortogonalitě a kolmé projekci (14). Mimo jiné ortogonalitu (1) i kolmou projekci (2) formálně zdefinujte, uveďte vlastnosti množin navzájem kolmých vektorů (2), vlastnosti projekce (3) a její užití při řešení soustav (2).

Přehledově sepište, co víte o ortonormálních bázích (14). Mimo jiné je nadefinujte (1), uveďte jejich užití v souřadných systémech (2) a popište, jak je lze získat (2).

Přehledově sepište, co víte o lineárních zobrazeních zachovávajících skalární součin (8). Mimo jiné je nadefinujte (1) a uveďte věty o jejich charakterizaci (3).

Přehledově sepište, co víte o ortogonálním doplňku (8). Mimo jiné jej nadefinujte (1) a uveďte jeho souvislost s řešením soustav (1). Uveďte větu o jeho dimenzi (2).

Přehledově sepište, co víte o pozitivně definitních maticích (14). Mimo jiné je nadefinujte (2), uveďte jejich základní vlastnosti (3) a algoritmus pro výpočet Choleského rozkladu (3).

Přehledově sepište, co víte o charakterizaci pozitivně definitních matic (10). Mimo jiné je nadefinujte (2) a uveďte jejich charakterizaci pomocí vlastních čísel (1) a determinantů (2).

Přehledově sepište, co víte o bilineárních a kvadratických formách a jejich maticích (14). Mimo jiné je axiomaticky nadefinujte (2+1), nadefinujte matice (1), popište jak se mění při změně báze (2) a uveďte dvě tvrzení o jejich diagonalizaci — obecně a Sylvesterův zákon (2+2).

Dále (zejména pro řešení úloh) je třeba zručně ovládat následující postupy (nad tělesy $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, případně, kde to dává smysl i nad $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$):

Spočítat determinant matice.

Provést rozvoj determinantu podle předepsaného řádku nebo sloupce.

Určit počet koster grafu pomocí determinantu.

Provádět operace s polynomy.

Sestavit Vandermondovu matici.

Provést Laplaceovu interpolaci.

Určit vlastní čísla a vlastní vektory matice i zobrazení.

Rozhodnout o kolmosti vektorů vzhledem ke skalárnímu součinu danému předpisem.

Spočítat kolmou projekci vektoru do podprostoru.

Provést Gramovu-Schmidtovu ortonormalizaci.

Rozhodnout, zdali je daná matice pozitivně definitní a případně určit její Choleského rozklad.

Sestavit matici kvadratické či bilineární formy z analytického vyjádření a naopak.

Spočítat matici formy při změně báze.

Určit signaturu reálné kvadratické formy.

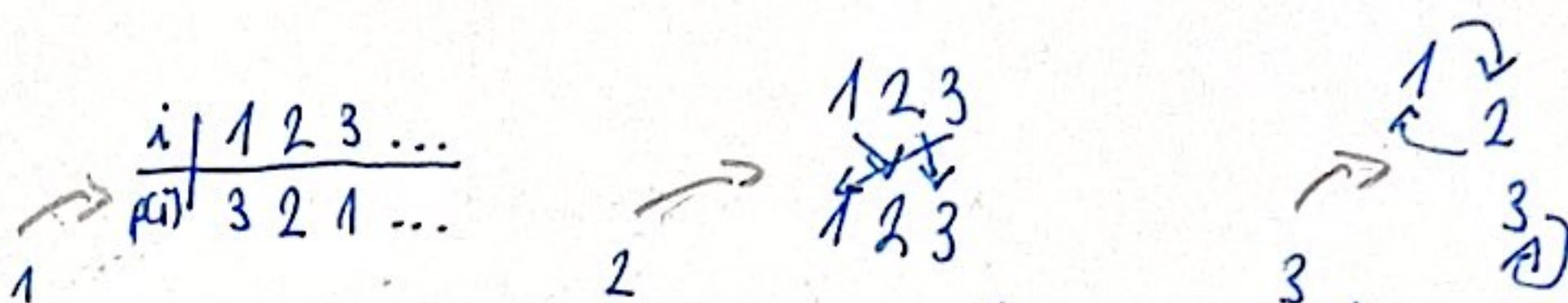
Spočítat polární bázi.

1. Definujte permutaci

Permutace na množině $\{1, 2, \dots, n\}$ je bijektivní zobrazení $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

* nejsou v ukázkách stejné permutace

• Zapisuje se tabulkou, bipartitním grafem, grafem cyklů nebo seznamem
 $\hookrightarrow (1, 2)(3)$



2. Definujte znaménko permutace

Znaménko nějaké permutace μ je $\text{sgn}(\mu) = (-1)^{\# \text{inverzí } \mu}$

Se znaménkem $+1$ jsou permutace sudé
 -1 jsou permutace liché

Důsledky věty o složené permutaci:

$\text{sgn}(\mu) = (-1)^{\# \text{transpozic rozkladu } \mu \text{ na transpozice}}$

$\text{sgn}(\mu) = (-1)^{\# \text{sudých cyklů } \mu}$

③ Definujte determinant

Determinant matice $A \in T^{n \times n}$ nad tělesem T je dán

$$\det(A) = \sum_{\mu \in S_n} \text{sgn}(\mu) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \mu(i)}$$

$\mu \in S_n$

↳ permutace ze
symetrické
grupy

" vlastně součet přes součin všech permutací ze symetrické
grupy o n prvcích dané matice "

④ Definujte adjungovanou matici

Necht $A \in T^{n \times n}$ je matice nad tělesem T a $n \geq 2$.

$$\text{Pak } (\text{adj} A)_{ji} = (-1)^{i+j} \det A^{ij}$$

↳ Vyhází z Laplaceova rozvoje:

Pro matice $A \in T^{n \times n}$, kde $n \geq 2$. Tak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\text{platí } \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A^{ij} \quad , \quad \text{kde } A^{ij} \text{ je matice}$$

po odstranění i -tého řádku a j -tého sloupce matice A — $\swarrow$ podmatice

5. Definujte Laplaceovu matici

Laplaceova matice grafu G s množinou vrcholů

$V_G = \{v_1, \dots, v_n\}$ je $L_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a platí pro ni:

$$L_G = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{pokud } i=j \\ -1 & \text{pokud } i \neq j \wedge (v_i, v_j) \in E_G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

6. Definujte polynom nad tělesem

Polynom stupně n s proměnnou x nad tělesem T

je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

kde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in T$ $\wedge$ $a_n \neq 0$

✓ značí se $p \in T(x)$ ✓

⑦. Definujte kořen polynomu a jeho násobnost

Kořen polynomu $p \in T(x)$ je $\alpha \in T$, pro které platí $p(\alpha) = 0$

┌ Nebo-li takové $\alpha \in T$, pro které platí, že $(x - \alpha)$ dělí p
bez zbytku. ┘

Násobnost kořene α z $p \in T(x)$ je největší takové k , že

$(x - \alpha)^k$ dělí p bez zbytku.

⑧. Definujte algebraicky uzavřené těleso

Algebraicky uzavřené těleso T je takové, že pro
každý polynom $p \in T(x)$ platí, že má alespoň 1 kořen.

$\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené.

$\mathbb{R}$ není algebraicky uzavřené.

9. Definujte Vandermondovu matici

Vandermondova matice značena $V_{n+1}(x_0, \dots, x_n)$ nad algebraicky uzavřeným tělesem T . Tedy $V \in T^{(n+1) \times (n+1)}$.

Matice reprezentuje polynom $p \in T[x]$ a koeficienty.

$a_0, \dots, a_n$ a n kořeny např. $r_1, \dots, r_m$. Potřeba $n+1$ různých hodnot (x_i, y_i)

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$a_0, \dots, a_n$ jsou řešením soustavy nalezání polynomu

$p \in T[x]$ pomocí $n+1$ různých hodnot, pro které

$\hookrightarrow$ stupně n

platí (x_i, y_i) a $i \in \{0, \dots, n\}$ a $p(x_i) = y_i$

Je regulární $\Leftrightarrow$

pro všechny

$x_0, \dots, x_n$ platí,

že $x_i \neq x_j$ pro

$i \neq j$

(10.) Definujte vlastní číslo a vlastní vektor lineárního zobrazení

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a

$f: V \rightarrow V$ je lineární zobrazení, pak:

- vlastní číslo je libovolné $\lambda \in T$, pro které existuje $v \in V \setminus \{0\}$ a platí $f(v) = \lambda v$

- vlastní vektor přísluší vlastnímu číslu

$\lambda \in T$ je libovolný vektor $v \in V$, co splňuje

$$f(v) = \lambda v$$

(11.) Definujte vlastní číslo a vlastní vektor matice

z úlohy 10. $\rightarrow$ pokud je $f: V \rightarrow V$ zobrazení konečného prostoru V , pak lze zobrazení definovat jako matici lineárního zobrazení vůči bázi B .

$A \in [f]_{B,B} \in T^{n \times n}$, pak:

- vlastní číslo $\lambda \in T$ musí splňovat $Av = \lambda v$,
pro nenulový vektor $v \in V \setminus \{0\}$

- vlastní vektor $v \in V$ je libovolný vektor, co splňuje

$$Av = \lambda \cdot v$$

12. Definujte charakteristický polynom

Charakteristický polynom matice $A \in T^{n \times n}$ je

$$p_A(x) = \det(A - xI_n)$$

Kořen charakteristického polynomu $p_A(x)$ je vlastní číslo matice $A \in T^{n \times n}$.

13. Definujte algebraickou násobnost vlastního čísla

Nechť $A \in T^{n \times n}$, $p_A(x) = \det(A - xI_n)$ je její charakter. polynom a $\lambda_0 \in T$ je vlastní číslo matice A či kořen $p_A(x)$.

Pak algebraická násobnost vlastního čísla λ_0 je rovně násobnosti kořene λ_0 v charakteristickém polynomu $p_A(x)$.

Ekvivalentně řečeno je to největší $k \geq 1$, pro které platí, že výraz $(x - \lambda_0)^k$ dělí $p_A(x)$ beze zbytku nebo lze vytknout $p_A(x) = (x - \lambda_0)^k q(x)$, kde pro $q(x)$ platí, že $q(\lambda_0) \neq 0$.

(14.) Definujte geometrickou násobnost vlastního čísla

Nechť $f: V \rightarrow V$ je lin. zobrazení a λ je jeho vlastní číslo nebo $A = [f]_{B,B} \in T^{n \times n}$, kde B je báze V a $\dim(B) = n$, pak:

geometrická násobnost je dimenze podprostoru vlastních vektorů vlastního čísla λ .

Nebo-li

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v\} = \{v \in V \mid (A - \lambda I)v = 0\}$$

a $\dim(V_\lambda)$ = geometrická násobnost

(15.) Definujte podobné matice

Matice $A, B \in T^{n \times n}$ jsou si podobné pokud existuje

regulární matice $R \in T^{n \times n}$ takové, že platí:

$$A = R^{-1} B R \quad \text{ekvivalentně} \quad R A R^{-1} = B \quad \text{nebo}$$

$$A = R B R^{-1} \quad \text{nebo}$$

$$B = R^{-1} A R$$

čímž znamená to, že matice A a B reprezentují

stejné lineární zobrazení $f: V \rightarrow V$, ale vůči

jiným bázím.

(16.) Definujte diagonalizovatelnou matici

Nechť je $A \in T^{n \times n}$ čtvercová matice a $D \in T^{n \times n}$

diagonální matice ($\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$).

Pak A je diagonalizovatelná pokud je podobná diagonální matici. Nebo-li existuje regulární matice $R \in T^{n \times n}$, pro kterou platí:

$$A = R D R^{-1}$$

(17.) Definujte Jordanův blok

Nechť $\lambda \in T$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak matice $J_k(\lambda) \in T^{k \times k}$ je

Jordanův blok značený $J_k(\lambda)$, pokud má na

hlavní diagonále λ a na superdiagonále samé 1,

když má diagonále nad ní. Na ostatních pozicích má 0.

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A^k = R D^k R^{-1}$$

užít: $\nearrow$
1. umocňování
2.

Matice je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$

vl. vektory všech
vl. čísel matice
tvorí bázi prostoru
 T^n

Diagonalizovatelná
A má Jordanovy
bloky 1×1

Jordanovy bloky
 Δ $k=1$ jsou
triviální

(18) Definujte Jordanův normální tvar

Jordanův normální tvar je blokově diagonální matice. Jejíž bloky na hlavní diagonále jsou Jordanovy bloky. Prvky mimo diagonálu jsou nulové.

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{k_n}(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Jordanův normální tvar musí být čtvercový

$J_{k_i}(\lambda_i)$ je Jordanův blok řádu k_i příslušný vlastnímu číslu λ_i .

(19) Definujte zobecněný vlastní vektor

Nechť $A \in T^{n \times n}$ je čtvercová matice a $\lambda \in T$ je vlastní číslo, pak zobecněný vlastní vektor $v \in T^n$ je takový vektor, pro který existuje $k \in \mathbb{N}$, že platí

$$(A - \lambda I)^k v = 0$$

Pro zobrazení $f: V \rightarrow V$ je zobecněný vlastní vektor takový, pro který platí $(f - \lambda \text{id})^k v = 0$ nebo-li $\ker((f - \lambda \text{id})^k) \neq \emptyset$

Souvislost s řetězcí:

V řetězcí $v_k, \dots, v_2, v_1, v_0$ je každý vektor obrazem předchozího, tedy $(A - \lambda I)v_i = v_{i-1}$

(20.) Definujte hermitovskou matici

Necht' $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je čtvercová matice nad tělesem komplexních čísel, pak hermitovská matice je taková, pro kterou platí:

$$\underline{A^H = A}$$

Hermitovská transpozice komplexní matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je $A^H \in \mathbb{C}^{n \times n}$, pro kterou platí $(A^H)_{ij} = \bar{a}_{ji}$, kde $\bar{a}$ znamená komplexně sdružené číslo.

Provky na diagonále musí být reálná čísla. $\rightarrow a_{ii} = \bar{a}_{ii}$

Pokud je matice reálná, pak $A^H = A$ je to same, co symetrická matice $A^T = A$.

Vlastní čísla hermitovské matice jsou reálná.

Každá hermitovská matice je unitárně diagonalizovatelná, nebo-li existuje unitární matice R , pro kterou platí, že $R^{-1}AR$ je diagonální matice.

(21.) Definiyite unitāru mēlci

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, pak je matice A unitární
pokud platí:

$$A^{-1} = A^H$$

ekvivalentne

$$A^H = I$$

$$A^H A = I$$

Unitární matice je isometrické zobrazení, co zachovává
délku vektoru a úhel mezi nimi.

↑
Sloupce unitární matice tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$

↳ Determinant unitárni matice je 1.

↑ Pokud je matice A reálná, pak platí pro unitární

$$A^{-1} = A^T \quad \text{orthogonal!}$$

↑
Součin, transpozice a inverze unitární matice je unitární.
↑
dvoe unitárních matic (vlastní výsledek pořadí je isometrické zobrazení.)

(22) Definujte skalární součin pro vektorové prostory nad komplexními čísly.

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

Skalární součin je zobrazení, které přiřadí každé dvojici vektorů $u, v \in V$ skalár $\langle u | v \rangle \in \mathbb{C}$, že jsou splněny následující axiomy: (4)

1. (nerápornost) $\forall u \in V: \langle u | u \rangle \in \mathbb{R}_0^+$

2. (pozitivní definitnost) $\forall u \in V: \langle u | u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

3. (hermitovská (konjugovaná) symetrie)

$$\forall u, v \in V: \langle u | v \rangle = \overline{\langle v | u \rangle}$$

4. (linearita v první složce)

$$\forall u, v, w \in V: \langle u+v | w \rangle = \langle u | w \rangle + \langle v | w \rangle$$

$$\forall u \in V, \forall \epsilon \in \mathbb{C}: \langle \epsilon u | v \rangle = \epsilon \langle u | v \rangle$$

(23) Definujte normu spojenou se skalárním součinem

Nechť V je prostor se skalárním součinem. (nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$). Norma odvozená od skalárního součinu je zobrazení $V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, která přiřadí vektoru u jeho normu:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle}$$

(24.) Definujte kolmé vektory

Vektory u, v z prostoru se skalárním součinem jsou

kolmé pokud $\langle u|v \rangle = 0$. Kolmé vektory se značí

$u \perp v$.

✓ v euklidovském prostoru $\langle u|v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \varphi$ a

kolmé $\Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

┘

(25.) Definujte ortonormální bázi

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem.

Báze $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ je v prostoru V ortonormální pokud splňuje:

1. $b_i \perp b_j$ pro každé dva různé $b_i, b_j \in B$

2. Každý vektor má normu (délku) rovnou jedné

$\|b_i\| = 1$ pro každé $b_i \in B$

nebo-li

$$\langle b_i | b_j \rangle = 0$$

(26.) Definujte Fourierovy koeficienty

Necht' B je ortonormální báze prostoru V .

Pro každé $v \in V$ platí $v = \langle v | b_1 \rangle b_1 + \dots + \langle v | b_n \rangle b_n$

Koeficienty $\langle v | b_i \rangle$ jsou Fourierovy koeficienty.

(27.) Definujte kolmou projekci

Necht' U je prostor se skalárním součinem a

V je jeho podprostor s ortonormální bází

$B = (b_1, \dots, b_n)$. Pak zobrazení $p_B: U \rightarrow V$

definované jeho $p_B(u) = \sum_{i=1}^n \langle u | b_i \rangle b_i$ je

ortogonální (kolmá) projekce z U na V .

(28.) Definujte izometrii

Lineární zobrazení mezi prostory V a W je izometrie, zachováva-li skalární součin.

$$\underline{\forall u, v \in V: \langle u | v \rangle = \langle f(u) | f(v) \rangle}$$

(29.) Definujte ortogonální doplněk

Nechť U je vektorový prostor a V je podmnožina.

Ortogonalní doplněk $V^\perp$ je množina všech vektorů z U kolmé na vektory z V .

$V^\perp$
(v perp)

$$\underline{V^\perp = \{ u \in U \mid \forall v \in V : u \perp v \} = \{ u \in U \mid \forall v \in V : \langle u, v \rangle = 0 \}}$$

$V^\perp$ je vždy podprostorem prostoru U , i když V není.

Pro každý podprostor V platí $V^\perp \cap V = \{0\}$

↑
přímý podprostor

$$(V^\perp)^\perp \supseteq V$$

$$V^\perp = V$$

V prostorech konečné dimenze platí: $\dim V + \dim V^\perp = \dim U$

(30.) Definujte Gramovu matici

Necht V je vektorový prostor se skalárním součinem a bází $\beta = (b_1, \dots, b_n)$.

Gramova matice je definována jeho $a_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$

a splňuje vztah $\forall u, v \in V: \langle u, v \rangle = [v]_{\beta}^H A^T [u]_{\beta}$

(31.) Definujte pozitivně definitní matici

Hermitovská matice A řádku n se nazývá pozitivně definitní pokud platí:

$$\underline{\forall v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : v^H A v > 0}$$

(32.) Definujte Choleského rozklad matice

Pro každou pozitivně definitní matici A existuje jednoznačná trojúhelníková matice

$$U \text{ taková, že } \underline{A = U^H U}$$

$\hookrightarrow$ s kladnými prvky na diagonále

Matice U je Choleského rozklad.

(33.) Definujte bilineární formu

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a

necht' zobrazení $f: V \times V \rightarrow T$ je bilineární forma na V ,

pokud' splňuje následující axiomy:

$$\bullet \quad \underline{\forall u, v \in V: \forall t \in T: f(tu, v) = f(u, tv) = t f(u, v)}$$

$$\bullet \quad \underline{\forall u, v, w \in V: f(u+v, w) = f(u, w) + f(v, w)}$$

$$\bullet \quad \underline{\forall u, v, w \in V: f(u, v+w) = f(u, v) + f(u, w)}$$

┌ Bilineární forma je symetrická pokud $\forall u, v \in V: f(u, v) = f(v, u)$ ┘

lineární v
první i
druhé složce

např. skalární
součin

(34.) Definujte kvadratickou formu

Zobrazení $g: V \rightarrow T$ je kvadratická forma existující

bilineární forma taková, že $g(v) = f(v, v)$ pro

všechny $v \in V$.

např.
od skalárního
součinu

$$g(v) = v_1 v_1 + v_2 v_2 + \dots + f(v, v)$$

prostě když
 $u=v$ u
bilineární
formy

(35.) Definujte matici bilineární formy vzhledem k bázi

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a

bází $B = (b_1, \dots, b_n)$

Matrice bilineární formy f vzhledem k bázi B

je matice A definovaná $a_{ij} = f(b_i, b_j)$

Matrice kvadratické
formy q je
matice symetrické
bilineární
formy.

(36.) Definujte analytické vyjádření bilineární formy vůči standardní bázi

Analytické vyjádření bilineární formy f nad T^n s maticí A je homogenní polynom f druhého stupně ve $2n$ proměnných daný

výrazem $f((u_1, \dots, u_n)^T, (v_1, \dots, v_n)^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i v_j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f(u, v) = 1u_1v_1 + 2u_1v_2 + 4u_2v_1 + 3u_2v_2$$

(37.) Definujte signaturu formy

Nechť reálná kvadratická forma q má diagonální matici D obsahující pouze $1, -1$ a 0 . — jako na diagonále

Signatura formy q je trojice $(\#1, \#-1, \#0)$,

tedy počet $1, -1$ a 0 na diagonále D .

(38.) Definujte polární bázi

Polární báze (vzhledem ke kvadratické formě q nebo symetrické bilineární formě f) je taková báze B vektorového prostoru V , vůči které má matice této formy diagonální tvar.

Tedy platí:

- $\forall b_i, b_j \in B: b_i \neq b_j \Rightarrow f(b_i, b_j) = 0$
- vyskytují se dvojice rovniny v analytickém vyjádření a rovnici smíšené rovniny (jako $x_1 x_2$)

(39.) Vysloste a dokažte větu o lineární determinantu

Věta:

Determinant matice je lineárně závislý na každém jejím řádku a sloupci.

1) Vzhledem ke skalárnímu násobku řádku

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ t \cdot a_{21} & \dots & t \cdot a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) Vzhledem ke sčítání řádku

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Důkaz

1) skalární násobek

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t \cdot a_{i1} & \dots & t \cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \cdot \left(\left(\prod_{i=1}^n a_{i, p(i)} \right) \cdot t \right) =$$

je to součin a vždy jeden člen je vynásoben t

$$= t \cdot \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, p(i)} = t \cdot \det(A) = t \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

t nezávisí na permutaci v sumě, lze vytknout

to samé platí pro sloupce jako důsledek věty.
 $\det(A) = \det(A^T)$

2) součet řádků (sloupců)

Máme matice A, B a C . Pro které předpokládáme, že

$$a_{kj} = \begin{cases} b_{ij} + c_{ij} & \text{pokud } k=i \\ b_{kj} = c_{kj} & \text{pokud } k \neq i \end{cases}$$

- tedy ostatní prvky kromě i -tého řádku jsou identické

← podle definice

$$\underline{\underline{\det A}} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{k=1}^n a_{k, p(k)} = \sum_{p \in S_n} a_{i, p(i)} \cdot \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus i} a_{k, p(k)} =$$

← použijte předpoklad pro i -tý řádek nebo-li i -tý prvek permutace

$$= \sum_{p \in S_n} (b_{i, p(i)} + c_{i, p(i)}) \cdot \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus i} a_{k, p(k)} =$$

← úměrnost $(b+c) \cdot x = b \cdot x + c \cdot x$

$$= \sum_{p \in S_n} b_{i, p(i)} \cdot \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus i} b_{k, p(k)} + \sum_{p \in S_n} c_{i, p(i)} \cdot \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus i} c_{k, p(k)} =$$

$\sum (B+C) = \sum(B) + \sum(C)$
a předpoklad pro $k \neq i$

$$= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{k=1}^n b_{k, p(k)} + \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{k=1}^n c_{k, p(k)} = \underline{\underline{\det B + \det C}}$$

↑ jen úprava do standardní definice

(40.) Vysloste a dokažte větu o determinanta součinu dvou matic

Věta:

Pro libovolné čtvercové matice $A, B \in T^{n \times n}$ nad stejným tělesem T platí:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Důkaz:

BÚNO. A i B jsou regulární, jinak dostaneme $0=0$

Matice $A \Rightarrow$ regulární, tak lze rozložit na součin elementárních matic.

- Elementární matice zachovávají determinant $\det(E) = \det(E) \cdot \det(B)$

$\hookrightarrow$ přičtení i -tého řádku k -j-tému $\rightarrow \det(E) = 1$ např. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ vynásobení i -tého řádku $t \in T \setminus \{0\} \rightarrow \det(E) = t$ např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$

$\nearrow$ přičte 2. k 1.
 $\nearrow$ 2. řádek vynásoben t

Pak $A = E_1 \cdots E_k$

$$\det(A \cdot B) = \det(E_1 E_2 \cdots E_k B) = \det(E_1) \cdot \det(E_2 \cdots E_k B) =$$

$$= \det(E_1) \cdot \det(E_2) \cdots \det(E_k) \cdot \det(B) = \det(E_1 \cdots E_k) \cdot \det(B) =$$

$$= \det A \cdot \det B$$

elementární matice E_i je matice, co lze

získat z

jednotkové provedením jedné elementární úpravy.

$\downarrow$
vynásobení řádku $t \in T \setminus \{0\}$
přičtení násobku řádku k jinému

Řez - sloup (ŘZ-SL)
řádkové úpravy zleva
sloupové úpravy zprava

prostě jen

$$A = E_1 \cdots E_k$$

Důsledek č.2

A regulární $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Důsledek č.1

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A) = \det I = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \det(A)^{-1}$$

(41.) Vysloďte a dokažte větu o Laplaceově rozvoji determinantu

Věta:

Pro čtvercovou matici $A \in T^{n \times n}$, kde $n \geq 2$ a každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A^{ij}$$

kde A^{ij} je podmatice A po odstranění i -tého řádku a j -tého sloupce

Důkaz:

1. Vyjádřím i -tý řádek jako lineární kombinaci kanonické

báze

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \end{vmatrix} + a_{i2} \cdot \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ a_{in} \cdot \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

a použijm lineární determinantu

2. Pak z přechodného součtu vyjádřím j -tý člen

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^T) \\ \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ -e_j^T \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot \begin{vmatrix} -e_j^T \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \text{že} \\ &= (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} -e_1^T \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & A^{ij} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \cdot \det A^{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\sum_{i=1}^n a_{ij} e_i) = \\ &= (\sum_{i=1}^n a_{ij}) \cdot \det \begin{pmatrix} e_i \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

v prezentaci

$i+1$ a $j+1$

pro zjednodušení
matricí,

správně je $i-1$ a
 $j-1$ permutací

(42.) Uveďte a dokažte Cramerovo pravidlo pro řešení soustav přes determinandy

Věta: Necht' $A \in T^{n \times n}$ je regulární a $b \in T^n$. Pak řešení soustavy

$$Ax=b \text{ je: } \text{ kde } x \in T^n \text{ je řešení}$$

$$x_i = \frac{\det A_{i \rightarrow b}}{\det A}$$

platí pro $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ a $A_{i \rightarrow b}$ je matice zkonstruovaná z A nahrazením i -tého sloupce vektorem b .

Důkaz:

$a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou sloupce matice A . Pak lze soustavu $Ax=b$ vyjádřit jako $b = \sum_{j=1}^n x_j a_j = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$

Pak nahradíme i -tý sloupec a spočítáme determinant:

$$\det A_{i \rightarrow b} = \det A_{i \rightarrow \sum_{j=1}^n x_j a_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \sum_{j=1}^n x_j a_{ji} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \sum_{j=1}^n x_j a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (\text{linearity determinantu})$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + x_n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_i \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= x_i \det A \Rightarrow x_i = \frac{\det A_{i \rightarrow b}}{\det A}$$

pro i pro řádky

$$x_i = \frac{\det A_{i \rightarrow b^T}}{\det A}$$

protože platí $\det A = \det A^T$

$$\det A_{i \rightarrow a_j} = 0$$

pro $i \neq j$, neboť

i -tý sloupec shodný s j -tým, tedy lineárně závislé

$\det A_{i \rightarrow a_i}$ je shodný

s $\det A$,

protože se nahradí i -tý sloupec i -tým, tedy jedním zbyde

(43.) Vyslozte a dokažte větu o adjungované matici

výpočet
inverzní matice

Věta: Necht' $A \in T^{n \times n}$ je regulární matice a $n \geq 2$. Pak platí:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A$$

kte $\text{adj} A$ je adjungovaná matice definovaná

$(\text{adj} A)_{ji} = (-1)^{i+j} \cdot \det A^{ij}$, kde A^{ij} je podmatice A po odstranění i -tého řádku a j -tého sloupce.

Důkaz:

Vynásobím $A \cdot \text{adj} A$. Budu mít 2 případy:

1) $i=j$ - $(A \cdot \text{adj} A)_{ij} = (i\text{-tý řádek } A) \cdot (i\text{-tý sloupec } \text{adj} A) = (A \cdot \text{adj} A)_{ii} =$
$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \cdot \det A^{ik} = \det A$$

definice Laplaceova rozvoje podle i -tého řádku

2) $i \neq j$ - $(A \cdot \text{adj} A)_{ij} = (i\text{-tý řádek } A) \cdot (j\text{-tý sloupec } \text{adj} A) =$
$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (-1)^{j+k} \cdot \det A^{jk} = \det A' = 0$$

Zase definice Laplaceova rozvoje, ale i -tý řádek jsem nahradil j -tým, nebo-li jde podle j -tého, ale odstranuji i -tý řádek a sloupec, tedy A' má 2 řádky shodné, a proto je $\det A' = 0$.

Pak platí $A \cdot \text{adj} A = \det A \cdot I \Rightarrow A^{-1} = \frac{I \cdot \text{adj} A}{\det A} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A$

(44.) Vyslovte a dokažte větu o počtu koster grafu

↑ Věta: Každý multigraf G s $|V_G| \geq 2$ splňuje

$$K(G) = \det L_G^n, \text{ kde } K(G) \text{ označuje počet koster,}$$

L_G^n je podmatice Laplaceovy matice po odebrání prvního řádku a prvního sloupce.

Laplaceova matice je definována jako

$$(L_G)_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{pro } i=j \\ -1 & \text{pro } i \neq j \text{ a } (v_i, v_j) \in E_G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$L_G \in \mathbb{R}^{m \times m}, \text{ kde } m = |V_G|$$

Důkaz:

↑ Okrajový případ: Pro nespojitelné grafy platí $0=0$, protože takový graf má 0 koster a po vyškrtnutí jednoho vrcholu jedné komponenty, tak v Laplaceově matici pořád zůstane vrchol druhé komponenty nedotčen a tedy determinant bude nulový.

Indukce podle $m = |E_G|$

1) základ (2 vrcholy) . bez smyčky.

$$K(G) = |E_G| = \deg(v_1) = \deg(v_2) = (L_G)_{1,1} = (L_G)_{2,2} = \det L_G^n$$

↑ pro multigraf by byla $L_G = \begin{pmatrix} m & -m \\ -m & m \end{pmatrix}$, pro normální graf $L_G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

} to
nejdůležitější

multigraf má
násobné hrany
a smyčky

↓
mohou vzniknout
kontrakce

Laplaceova
matice je singulární

← může být i

-2, -3, tedy

-(násobnost hrany)
u multigrafu

Pokud bude mít G smyčku e , tak se bude ignorovat, protože kosteru grafu smyčka neobsahuje.

$$K(G) = K(G - e) = \det L_{G-e}^{11} = \det L_G^{11}$$

2) Indukční krok

Zvolím si libovolné $e \in E_G$ B.Ú.N.O. zvolím $e = (v_1, v_2)$

Pak ověřím, že platí vztah $\det L_G^{11} = \det L_{G-e}^{11} + \det L_{G \cup e}^{11}$

počet všech koster počet koster bez hrany e počet koster s hranou e , zaručím tím, že sloučím v_1 a v_2 do megavrcholu

Označím

$$\left. \begin{array}{l} A = L_G^{11} \\ B = L_{G-e}^{11} \\ C = L_{G \cup e}^{11} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{platí pro ně } C = A^{11} = B^{11}, \text{ protože } e \text{ odlišuje} \\ \text{jen vrcholy } v_1 \text{ a } v_2, \text{ tedy } C, A^{11}, B^{11} \text{ jsou podmatice} \\ L_G \text{ odpovídající vrcholům } v_3, \dots, v_n \end{array}$$

Podle indukčního předpokladu vím, že platí $K(G-e) = \det B$

$$K(G \cup e) = \det C$$

Matice A a B jsou shodné až na $b_{11} = a_{11} - 1$ $\leftarrow$ o vrchol v_2

Tedy stačí vyjádřit první sloupec

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n-1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + 1 \\ \vdots \\ b_{n-1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n-1,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = b_1 + e_1$$

Pak

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_{n-1}) = \det(b_1 + e_1, b_2, \dots, b_{n-1}) = \det(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) +$$

$$= \det B + \det C \quad \leftarrow \text{užijeme Laplaceův rozvoj podle 1. sloupce}$$

$$\text{Pak platí } K(G) = K(G-e) + K(G \cup e) = \det L_{G-e}^{11} + \det L_{G \cup e}^{11} = \det L_G^{11}$$

o - konstrukce

odehráním

hrany e se změní $\rightarrow$

4 čísla $\rightarrow (1,1), (2,2), (1,2), (2,1)$, ale ty poslední 2 sečtnou a zbyde tam jen $(2,2)$ o 1 menší

45. Vysloste a dokažte malou Fermatovu větu

Věta:

Necht p je prvočíslo, pak pro libovolné

$$x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} : x^{p-1} = 1$$

Důkaz:

Vychází z faktu, že zobrazení $i \rightarrow xi$ je v $\mathbb{Z}_p$

bijekce, tedy zobrazení $i \rightarrow xi$ je bijekce na $\{1, \dots, p-1\}$

nebo-li prostě se mi prvky permichují, ale množina zůstane stejná.

Pak (z nějakého důvodu vsjácím součin) $\rightarrow p-1$ součin jako mocnina

$$\prod_{i=1}^{p-1} i = \prod_{i=1}^{p-1} xi = x^{p-1} \cdot \prod_{i=1}^{p-1} i \Rightarrow \underline{x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}}$$

$\nwarrow$ ten samý součin, tedy se jen přehází čísla

Důsledek č.1:

platí $\rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}_p : x^p - x = 0$
pro $0^p - 0 = 0$

Důsledek č.2:

Pro každý polynom $\forall q(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ existuje polynom $r(x)$ stupně nejvýše $p-1$, že platí $\forall x \in \mathbb{Z}_p : q(x) = r(x)$
 $\hookrightarrow$ protože $x^p = x \pmod{p}$, tak platí $x^{p+1} = x^2$, atd.

$$x^p \equiv x \pmod{p}$$
$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

prostě i na $\rightarrow$
= bijekce

čten $\prod_{i=1}^{p-1} i$ je
nemulový, protože je
to součin čísel
z množiny $\{1, \dots, p-1\}$
a nemůže být nikdy nula
není důkaz $\rightarrow$

46. Vyslovi a dokažte větu o Vandermondově matici

Věta: Vandermondova matice $V_{n+1}(x_0, \dots, x_n)$ je regulární

právě tehdy, když $x_0, \dots, x_n$ jsou navzájem různá.

$V_{n+1} \in T^{(n+1) \times (n+1)}$

Kde Vandermondova matice je definována, tak že prvek na pozici $i, j \in \{0, \dots, n\}$ je x_i^j .

Důkaz:

Regularitu ověříme podle determinantu a kdy se nerovná 0

... $\begin{matrix} 3. & 2. & 1. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \leftarrow \cdot (-x_0)$ odečtu od každé $-x_0$ násobek přeškrtnutého sloupce

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_0 & x_0^2 - x_0 \cdot x_0 & \dots & x_0^n - x_0 \cdot x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 \cdot x_1 & \dots & x_1^n - x_0 \cdot x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 \cdot x_n & \dots & x_n^n - x_0 \cdot x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \prod_{i=1}^n (x_i - x_0)$$

Uplatněním vzorce podle 1. věty

pak lze dopočítat pomocí rekurence

$$\det(V_{n+1}(x_0, \dots, x_n)) = \det(V_n(x_1, \dots, x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) =$$

$$= \det(V_{n-1}(x_2, \dots, x_n)) \cdot \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \cdot \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) =$$

$$= \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

protože jsou všechna čísla navzájem různá, tak je Vandermondova matice regulární a má jedinečný polynom po interpolaci všech

(47.) Uveďte a dokažte správnost Lagrangeovy interpolace

Věta:

Nechť je dáno $n+1$ bodů (x_i, y_i) , kde $i \in \{1, \dots, n\}$.

Pak existuje polynom stupně nejvýše n takový, že

$$\forall i: p(x_i) = y_i.$$

Lze jej vyjádřit jako lineární kombinaci

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i p_i(x)$$

$$\text{ kde } p_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } j=i \\ 0 & \text{pro } j \neq i \end{cases}$$

Vlastně
pokud dosadíme x_i
tak dostaneme 1 a
pokud x_j , tak 0

v čitateli = polynom,
kdy x_j dosadím dostanu 0
v jmenovateli = výdelin
vlastně hodnotou
co dostanu v čitateli
po dosazení x_i bych
dostal 1

ten polynom mi pak
vyskazuje se rovná
 y_i pokud dosadím x_i
hrozně umíte i g

Důkaz:

Pro zkonstruovaný polynom

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i p_i(x) \quad \text{platí} \quad p_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i=j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Tedy po dosazení x_j se redukuje na

$$p(x_j) = y_j \underbrace{p_j(x_j)}_{\text{z předpokladu}} = y_j \cdot 1 = y_j$$

Lze redukovat, protože pro všechny ostatní polynomy

$$\text{platí } p_i(x_j) = 0$$

(48.) Vyslozte a dokažte pozorování o podprostoru vlastních vektorů

Věta 1.11: Vlastní vektory odpovídající stejnému vlastnímu číslu tvoří podprostor.

Kde vl. číslo je $\lambda \in T$, pro které platí $f(v) = \lambda \cdot v$, kde $v \in V \setminus \{0\}$,
k V je vektorový prostor nad tělesem T a $f: V \rightarrow V$.

Vl. vektor je $v \in V$, pro který platí $f(v) = \lambda \cdot v$ pro nějaké
vl. číslo.

Důkaz:

definují si množinu vl. vektorů vl. čísla λ

$$U = \{v \in V : f(v) = \lambda \cdot v\}$$

Pak platí $\forall u, v \in U$ a $t \in T$

1) Uzavřenost na skalární násobky

$$\begin{aligned} f(t \cdot v) &= t \cdot f(v) = t \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot t \cdot v \\ &\quad \swarrow \text{linearita lin. zobrazení} \quad \nwarrow \text{komutativita} \\ &\quad \nearrow \text{def. vl. čísla a vektorů} \end{aligned}$$

2) Uzavřenost na součet vektorů

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(u) + f(v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v = \lambda \cdot (u+v) \\ &\quad \swarrow \text{linearita} \quad \nwarrow \text{distributivita} \\ &\quad \nearrow \text{def. vl. čísla a vektorů} \end{aligned}$$

U je podprostorem, protože je uzavřen na skalární násobky
a vektorový součet.

(49.) Vyslozte a dokažte větu o lineární nezávislosti
vlastních vektorů

Věta:

Nechť $f: V \rightarrow V$ je lineární zobrazení, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou
různá vlastní čísla a $v_1, \dots, v_k$ odpovídající nekivující
vlastní vektory

Potom platí, že vektory $v_1, \dots, v_k$ jsou lineárně
nezávislé.

Důkaz:

(sporem)

k je nejmenší číslo, pro které věta neplatí, tedy lze
nalezt lineární kombinaci k vektorů, co jsou lineárně
závislé s různými vlastními čísly.

$$0 = \sum_{i=1}^k a_i v_i \quad \wedge \quad \exists a_i : a_i \neq 0$$

1) vyjádříme nulový vektor z definice vl. čísla

$$0 = \lambda_k \cdot 0 = \lambda_k \cdot \sum_{i=1}^k a_i v_i = \sum_{i=1}^k \lambda_k \cdot a_i \cdot v_i$$

2) toty vyjádříme podle definice vl. čísla nulový vektor, ale zobrazením

$$f(0) = f\left(\sum_{i=1}^k a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i f(v_i) = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \lambda_i \cdot v_i$$

lineární skalárů

$$0 = 0 - 0 = \sum_{i=1}^k \lambda_k a_i \cdot v_i - \sum_{i=1}^k a_i \cdot \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_i) \cdot a_i v_i$$

ukončování důkazu

protože $\lambda_i \neq \lambda_k$, λ_k $(\lambda_k - \lambda_i) a_i \neq 0$ $\swarrow a_i \neq 0$

Tedy máme jsem nekvadratické lineární kombinaci z $k-1$
vektorů, což je spor s předpokladem, že k je nejmenší číslo

Tedy vektory $v_1, \dots, v_k$ jsou lineárně nezávislé.

50. Vyslozte a dokažte větu o kořenech charakteristického polynomu matice,

Věta:

Číslo $\lambda \in T$ je vlastním číslem $A \in T^{n \times n} \Leftrightarrow \lambda$ je kořenem jejího charakteristického polynomu $p_A(x)$.

↑ kde $p_A(x) = \det(A - xI_n)$ →

Důkaz:

①

↖ nenulový vektor v

λ je vl. číslo $A \in T^{n \times n} \Leftrightarrow \exists v \in T^n \setminus \{0\} : A \cdot v = \lambda \cdot v$

②

lze upravit na $A \cdot v - \lambda \cdot v = 0$

Abychom ušli v , tak vynásobíme $\lambda \cdot v$ jednotkovou maticí

I_n ③

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot v = 0$

$v \neq 0$, tedy nektrivální (nenulové) řešení má tato

④

soustava rovnic $(A - \lambda I_n)$ je singulární, tedy

⑤

$\det(A - \lambda I_n) = 0 = p_A(x)$

✓ prezentaci
1, 2, 3, 4, 5 jsou
ekvivalentní,
tedy lze napsat
jen pomocí $\Leftrightarrow$

(51.) Vysloďte a dokažte větu o konstrukci matice s
předepsaným charakteristickým polynomem.

Věta:

Pro libovolná $b_0, \dots, b_{n-1} \in T^m$ platí, že char. polynom

$(x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0)(-1)^n$ odpovídá

matice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix} \in T^{m \times m}$

Důkaz:

spočítám char. polynom matice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -b_0 \\ 1 & -x & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} - x \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{podle 1. řádku}]{\text{rozvoj}} = -x \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 1 & -x & \dots & 0 & -b_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} - x \end{vmatrix} + (-1)^n \cdot b_0 \cdot 1 =$$

$$= -x \left(-x \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -b_2 \\ 1 & -x & \dots & 0 & -b_3 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -b_4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} - x \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \cdot b_1 \cdot 1 \right) + (-1)^n \cdot b_0 \cdot 1 =$$

$$= (x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_2x^2 + b_1x + b_0)(-1)^n$$

bo a
 $-b_0$, protože
 1. řádek a n-tý
 sloupec
 Zbude determinant
 s 1 na diagonále
 a 0 pod ní
 zase rozvoj podle
 1. řádku

(52) Vyslovte a dokažte pozorování o hodnotách tří koeficientů
charakteristického polynomu matice.

Věta:

Nechť $p_A(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ je charakteristický polynom
 matice $A \in T^{n \times n}$.

Pak pro koeficienty platí:

$$1) b_n = (-1)^n$$

$$2) b_0 = \det(A)$$

$$3) b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Důkaz:

$$1) b_n = (-1)^n$$

Jediná permutace char. polynomu $p_A(x) = \det(A - xI_n)$, kde
 se vyskytuje n -krát x je součin prvků na diagonále

$$2) b_0 = \det(A)$$

$$b_0 = p_A(0) = \det(A - 0 \cdot I_n) = \det(A)$$

$$3) b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\rightarrow (a_{11}-x)(a_{22}-x) \cdots (a_{nn}-x)$$

Je zřejmé ze součinu členů na diagonále. Jednou vyberu a_{ii} a
 $(n-1)$ krát $-x$.

jen součin
 prvků diagonály
 může dát x^n a v char.
 polynom od každého
 odečtu x

do $p_A(x) = \det(A - xI_n)$
 dosadím $x=0$, tedy
 $p_A(x) = \det(A - 0 \cdot I_n) =$
 $\det(A)$

Pokud má $p_A(x)$ rozklad $p_A(x) = (\lambda_1 - x)^{r_1} (\lambda_2 - x)^{r_2} \dots (\lambda_k - x)^{r_k}$,

kde $r_1 + \dots + r_k = n$, tak

$$b_0 = \det(A) = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{r_i} \quad \leftarrow \text{dosadím } x=0$$

$$b_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n a_{ii} = (-1)^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k \underbrace{r_i}_{\text{vlastně kolikrát můžeme vykrátit}} \lambda_i$$

λ_i , což je r_i -krát

na určení odhadit, že
některé například
1-0 nebo něco

Geršgorinovy
↓ kruhy

Vlastně každé vlastní
číslo patří do sjednocení

kruhů, kde jeden

kruh řádku má
střed tvořen prvkem

na diagonále a
poloměr součtem

absolutních
hodnot ostatních
čísel v řádku

(53.) Vylovte a dokažte větu o Geršgorinových kruzích

Věta: Necht $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Každému vlastnímu číslu λ

bre najít index řádku $i \in \{1, \dots, n\}$, pro který

platí:
$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Důkaz:

Vezmu $v \in \mathbb{C}^n$ příslušný k λ .

Necht μ_i je složka v s největší absolutní hodnotou.

Pak vyjádřím $v = \frac{1}{\mu_i} \cdot \mu$. Pak platí $v_i = 1$ a

$$|v_j| \leq 1 \text{ pro } j \neq i$$

Pak z rovnice $A \cdot v = \lambda \cdot v$ vezmu jen i -tý řádek

$$\begin{aligned} a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{ii}v_i - \lambda v_i &= 0 \\ \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j - \lambda v_i &= 0 \end{aligned}$$

Od obou stran odečtu $a_{ii}v_i$

$$\sum_{j \neq i} a_{ij}v_j = \lambda - a_{ii}$$

Pak z trojúhelníkové nerovnosti ($\forall x, y \in \mathbb{C} : |x+y| \leq |x| + |y|$)
platí

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij}v_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}v_j| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |v_j| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

↖ podle toho, že $j \neq i : |v_j| \leq 1$

(54.) Uveďte a dokažte Cayleovu - Hamiltonovu větu

Věta:

Pro matici $A \in T^{n \times n}$ a její charakteristický polynom

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

platí

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_2 A^2 + b_1 A + b_0 I_n = O_{n,n}$$

Důkaz:

1)

Použijte větu $\det(M) \cdot I_n = M \cdot \text{adj}(M)$

a M zvolím $M = A - xI_n$

2)

$$\text{adj}(A - xI_n) = x^{n-1} (C_{n-1} + \dots + x^2 C_2 + x C_1 + C_0)$$

(vyjádřím si z definice, prostě nějaké podmatice a to tvoří polynom stupně nejvýše $n-1$)

3)

$\det(M) = \det(A - xI_n) = p_A(x)$ a dosadím do věty v (1)

$$p_A(x) \cdot I_n = (A - xI_n) \cdot (x^{n-1} C_{n-1} + \dots + x^2 C_2 + x C_1 + C_0)$$

$$(-1)^n x^n \cdot I_n + b_{n-1} x^{n-1} \cdot I_n + \dots + b_2 x^2 \cdot I_n + b_1 x \cdot I_n + b_0 \cdot I_n =$$

$$= -x^n C_{n-1} + x^{n-1} (A \cdot C_{n-1} - C_{n-2}) + \dots + x^2 (A \cdot C_2 + C_1) + x(A \cdot C_1 - C_0) + A \cdot C_0$$

4) vynásobím rovnost A podle mocniny x , protože rozdělím na spoustu menších rovností.

	<u>LEVÁ</u>	<u>PRAVÁ</u>	<u>VYNÁSOBÍM ZLEVA</u>
x^n :	$(-1)^n I_n =$	$-C_{n-1}$	$\cdot A^n$
x^i :	$b_i I_n =$	$A \cdot C_i - C_{i-1}$	$\cdot A^i$
x^0 :	$b_0 I_n =$	$A \cdot C_0$	$\cdot 1 \text{ (nicím)}$

$$\begin{aligned}
 & A^n (-1)^n I_n + A^{n-1} b_{n-1} I_n + \dots + A^2 b_2 + A b + b_0 = \\
 & = \underbrace{-A^n C_{n-1}} + \underbrace{A^{n-1} (A \cdot C_{n-1} - C_{n-2})} + \dots + \underbrace{A^2 (A \cdot C_2 - C_1)} + \\
 & \underbrace{A \cdot (A \cdot C_1 - C_0)} + A C_0 = O_{n,n}
 \end{aligned}$$

↗ prostě se odečtou stejné
členy po vynásobení

(55.) Uveďte a dokažte dvě pozorování a souvislosti
důležitý o násobnosti vlastních čísel podobných
matic.

Definice podobnosti.

Matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou
 si podobné pokud
 regulární
 existuje R takovéže

$$A = RBR^{-1}$$

Pozorování č.1 : (stejná vlastní čísla podobných matic
 jen R otočí směr vlastních vektorů) $\downarrow$

Pokud je matice A podobná B (nebo-li $B = RAR^{-1}$) a
 vlastní vektor v přísluší vlastnímu číslu λ v A , tak
 λ je také vlastní číslo B a přísluší mu vektor Rv .

Důkaz č.1:

$$\text{pomocí vety } A \cdot v = \lambda \cdot v$$

$$B \cdot R \cdot v = RAR^{-1}R \cdot v = RA \cdot v = R \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot R \cdot v$$

$$\Rightarrow B \cdot u = \lambda \cdot u \quad \text{pro } u = Rv$$

Důležitý č.1.:

Pokud je A podobná B a λ je vlastní číslo matice A ,
 pak vlastní číslo λ má v B stejnou geometrickou
 násobnost jako v A . Protože $v \mapsto Rv$ je izomorfismus.
 podprostorů vlastních vektorů.

Pozorování č. 2: (podobné matice mají stejný charakteristický polynom)

$$\text{Pokud } B = RAR^{-1}, \text{ pak } p_A(x) = p_B(x)$$

protože x je skalár

Důkaz č. 2:

↗ vlastně vynásobit
jednotkovou
maticí

$$\begin{aligned} p_B(x) &= \det(B - xI_n) = \det(RAR^{-1} - R(xI_n)R^{-1}) = \\ &= \det(R(A - xI_n) \cdot R^{-1}) = \det(R) \cdot \det(A - xI_n) \cdot \det R^{-1} = \\ &= \det(R) \cdot \det(R^{-1}) \cdot \det(A - xI_n) = \det(I) \cdot \det(A - xI_n) = 1 \cdot \det(A - xI_n) = p_A(x) \end{aligned}$$

Důsledek č. 2:

Je-li λ vlastní číslo matice A a B je podobná A ,
pak vl. číslo λ v B má stejnou algebraickou
násobnost co v A .

(56) Vypíšte a dokažte větu o vztahu geometrické a algebraické násobnosti vlastního čísla.

$$1 \leq \text{geom.} \leq \text{alg.} \leq n$$

Věta:

Pro každé vlastní číslo λ matice A platí, že geometrická násobnost λ je vždy menší nebo rovna algebraické násobnosti λ .

geometrická násobnost je vždy alespoň 1 jinak by to nebylo vlastní číslo

Důkaz:

$A \in T^{n \times n}$ jako matice lineární zobrazení $f: T^n \rightarrow T^n$

Necht λ je vlastní číslo matice A s vektory

$v_1, \dots, v_k$ příslušných k λ . Teď λ má geometrickou násobnost k .

Doplňme vektory $v_1, \dots, v_k$ na bázi $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$.

Pak platí $[f]_{B,B} = [id]_{E,B} A [id]_{B,E}$.

Pro prvních k sloupců $[f]_{B,B}$ platí $f(v_i) = \lambda \cdot v_i$, tedy na diagonále budou λ a jinde samé nuly

$[f]_{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\leftarrow C$ a D jsou podmatice zbylých nevlastních vektorů

Protože A je podobná $[f]_{B,B}$, tak platí, že

$$\mu_{[f]_{B,B}}(x) = p_A(x)$$

Tedy

$$p_{[f]_{B,B}} = \det \begin{pmatrix} (\lambda - x)I_k & C \\ 0 & D - xI_{n-k} \end{pmatrix} = (\lambda - x)I_k \cdot (D - xI_{n-k}) =$$

$$= \underbrace{(\lambda - x)^k}_{k\text{-krát}} \cdot \underbrace{(D - xI_{n-k})}_{\text{může tam být také } \lambda \text{ jako kořen}}$$

Tedy algebraická násobnost λ je větší nebo rovna geometrické násobnosti.

(57.) Uveďte a dokažte nezbytnou a postačující
podmínku, kdy je matice diagonalizovatelná

Věta :

Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je podobná diagonální matici D
(nebo-li $A = RDR^{-1}$) $\iff$ existuje báze $\mathbb{R}^n$ sestávající
z vlastních vektorů A .

Důkaz:

$$AR = RD, \text{ kde } R = (v_1, \dots, v_n), \text{ kde } D = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix},$$

kde $v_1, \dots, v_n$ jsou vlastní vektory matice A .

$$\text{Pak } AR = (A \cdot v_1, A \cdot v_2, \dots, A \cdot v_n)$$

$$RD = (v_1 \cdot \lambda, v_2 \cdot \lambda, \dots, v_n \cdot \lambda)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: A \cdot v_i = \lambda \cdot v_i$$

A je podobná D , protože $Av = \lambda \cdot v$ je definice vl. čísla a
vektoru

(58.) Uveďte a dokažte tvrzení o zobecněných

vlastních vektorech

Pokud matice

Tvrzení:

Nechť pro matici $A \in T^{n \times n}$ platí $AR = RJ_\lambda$, kde

J_λ je jordanův blok řádu n a vlastním číslem λ na

diagonále. Označme i -tý sloupec matice R jako v_i ,

pak platí:

$$(A - \lambda I_n)^i v_i = 0$$

Důkaz: (všeznašobení $AR = RJ_\lambda$ sloupce po sloupcích)

$$\begin{array}{c|cccc}
 RJ_\lambda & \lambda & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 & 0 & \lambda & & 1 & & 0 \\
 & 0 & 0 & & \lambda & & 0 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & 0 & 0 & & 0 & \dots & \lambda
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 v_1 & v_2 & \dots & v_m \\
 \hline
 \lambda v_1 & v_1 + \lambda v_2 & v_2 + \lambda v_3 & v_{m-1} + \lambda v_m
 \end{array}$$

$$A \cdot R = (Av_1; Av_2; \dots; Av_m)$$

definice v. vektoru

vynásobím zleva $(A - \lambda I_n)$

$$i=1 \quad Av_1 = \lambda v_1 \Rightarrow (A - \lambda I_n) v_1 = 0$$

dosadím $(A - \lambda I_n) v_1 = 0$

$$i=1 \quad Av_2 = v_1 + \lambda v_2 \Rightarrow (A - \lambda I_n) v_2 = v_1 \Rightarrow (A - \lambda I_n)^2 v_2 = 0$$

zobecněný vlastní vektor řádu 2, tedy až na 2. pokus dostaneme 0

$$i \geq 2 \dots m \quad Av_i = v_{i-1} + \lambda v_i \Rightarrow (A - \lambda I_n) v_i = v_{i-1} \Rightarrow (A - \lambda I_n)^i v_i = 0$$

(59.) Vyslovte a dokažte větu o diagonalizaci

speciálních komplexních matic.

Věta:

Každá hermitovská matice A má všechna vlastní čísla reálná. Navíc existuje unitární matice R taková, že RAR^{-1} je diagonální.

Důkaz: (matematickou indukcí podle n)

$n=1$

Věta platí triviálně, A_1 je diagonální.

$n \rightarrow n+1$

- Protože $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené těleso, tak matice A_n má alespoň 1 vlastní číslo λ a k němu příslušící vlastní vektor $v \neq 0$.

- Tento vektor upravíme na jednotkový, tedy násobkem $\frac{1}{\sqrt{v^H v}}$, aby platilo $v^H v = 1$ $\leftarrow$ skal. součin $\langle v | v \rangle$

- P_n doplníme na unitární matici pomocí v

- Protože $A_n v = \lambda v$, tak $A_n \cdot P_n = \underbrace{(A_n \cdot v, A_n \cdot u_2, \dots, A_n \cdot u_n)}_{\lambda v}$

má λv jako první sloupec

$\leftarrow A_n^H = A_n$

- Podle důkazu $(P_n^H A_n P_n)^H = P_n^H A_n^H (P_n^H)^H = P_n^H A_n P_n$ je $P_n^H A_n P_n$ hermitovská

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{v^H v}} \cdot v \right)^H \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{v^H v}} \cdot v \right) &= \\ = \frac{v^H v}{v^H v} &= 1 \end{aligned}$$

Pro první sloupec $P_m^H A_m P_m$ platí:

$$P_m^H A_m \cdot v = P_m^H \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot P_m^H \cdot v = \lambda \cdot \underbrace{(1, 0, \dots, 0)^T}_{\text{protože}} = (\lambda, 0, \dots, 0)^T$$

protože

$$\left. \begin{aligned} v^H v &= 1 \\ u_2^H v &= 0 \\ &\vdots \\ u_m^H v &= 0 \end{aligned} \right\}$$

protože P_m^H je unitární a
je hermitovsky transponovaná

Protože $(\lambda, 0, \dots, 0)^T$ je první sloupec $P_m^H A_m P_m$ je hermitovská,

tak platí, že $(\lambda, 0, \dots, 0)^T$ je i první řádek $P_m^H A_m P_m$.

$$P_m^H A_m P_m = \begin{bmatrix} \lambda & 0^T \\ 0 & A_{m-1} \end{bmatrix}, \text{ kde } A_{m-1} \text{ je také hermitovská}$$

Pro A_{m-1} z předpokladu že máme R_{m-1} unitární, aby

platilo $R_{m-1}^{-1} A_{m-1} R_{m-1} = D_{m-1}$ kde D_{m-1} je diagonální

Položim $R_m = P_m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{m-1} \end{bmatrix}$

pak

$$R_m^{-1} \cdot A_m \cdot R_m = R_m^H A_m R_m = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{m-1}^H \end{bmatrix} \cdot \overbrace{P_m^H A_m P_m}^{\begin{bmatrix} \lambda & 0^T \\ 0 & A_{m-1} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{m-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0^T \\ 0 & D_{m-1} \end{bmatrix} = \underline{\underline{D_m}}$$

→ tedy vlastní čísla reálná a na
diagonále má D_m

$$\begin{aligned} & R_{m-1}^H A_{m-1} R_{m-1} \\ & \uparrow \\ & R_{m-1}^H = R_{m-1}^{-1} \end{aligned}$$

(60.) Vyslovte a dokažte Cauchyovu-Schwarzovu

nerovnost

Věta:

Skalární součin libovolných dvou vektorů u a v ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{C}$ splňuje

$$|\langle u|v \rangle| \leq \sqrt{\langle u|u \rangle \langle v|v \rangle}$$

nebo-li (pomocí $\|u\| = \sqrt{\langle u|u \rangle}$) normy

$$|\langle u|v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Důkaz:

1) Pro $u=0$ nebo $v=0$, tak nerovnost triviálně platí $0 \leq 0$

2) Necht' máme vektor $u+tv$, kde $t \in \mathbb{C}$ je libovolné komplexní číslo

Podle definice normy platí: $\|u+tv\|^2 \geq 0$

3) rozepišu normu

$$\langle u+tv|u+tv \rangle = \langle u|u \rangle + t \cdot \langle u|v \rangle + \bar{t} \langle u|v \rangle + t\bar{t} \langle v|v \rangle$$

Neboť to platí pro libovolné $t \in \mathbb{C}$, tak zvolím

$$t = - \frac{\langle u|v \rangle}{\langle v|v \rangle}$$

Dosažením $t = -\frac{\langle u|v \rangle}{\langle v|v \rangle}$, kde $\bar{t} = -\frac{\overline{\langle u|v \rangle}}{\overline{\langle v|v \rangle}} = -\frac{\langle v|u \rangle}{\langle v|v \rangle}$

$$0 \leq \langle u|u \rangle + t \langle v|u \rangle + \bar{t} \langle u|v \rangle + t\bar{t} \langle v|v \rangle$$

$$0 \leq \langle u|u \rangle - \frac{\langle u|v \rangle \langle v|u \rangle}{\langle v|v \rangle} - \frac{\langle v|u \rangle \langle u|v \rangle}{\langle v|v \rangle} + \frac{\langle v|u \rangle}{\langle v|v \rangle} \cdot \frac{\langle u|v \rangle}{\langle v|v \rangle} \cdot \langle v|v \rangle$$

$$0 \leq \langle u|u \rangle - \frac{\langle u|v \rangle \langle v|u \rangle}{\langle v|v \rangle} \quad / \cdot \langle v|v \rangle \quad \leftarrow \text{kde } \langle v|v \rangle > 0$$

$$0 \leq \langle u|u \rangle \langle v|v \rangle - \langle u|v \rangle \langle v|u \rangle$$

$\mathbb{R}$ použijte $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ podle vzorce $\mathbb{C}$

$$|\langle u|v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$|\langle u|v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

(61.) Vyslozte a dokažte vztah mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem

Věta:

Pro libovolný $u \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_i^2}$$

Důkaz:

Zvolím si $v = (1, 1, \dots, 1)^T$

Použiji Cauchyho Schwarzovu nerovnost $|\langle u|v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

$$\sum_{i=1}^n u_i = \langle u|v \rangle \leq |\langle u|v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \cdot \sqrt{n}$$

protože $v = (1, 1, \dots, 1)^T$

z definice
absolutní
hodnoty

↑
součet
jedniček

$$\sum_{i=1}^n u_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \cdot \sqrt{n} \quad / : n$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{n} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2}$$

(62.) Vysloďte a dokažte trojúhelníkovou nerovnost

Veľa: Pro každou normu odvozenou ze skalárního součinu a libovolné vektory $u, v \in V$ platí:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Důkaz:

↖ definice normy

$$\|u+v\| = \sqrt{\langle u+v | u+v \rangle} = \sqrt{\langle u|u \rangle + \langle u|v \rangle + \langle v|u \rangle + \langle v|v \rangle} =$$

$$= \sqrt{\|u\|^2 + \langle u|v \rangle + \overline{\langle u|v \rangle} + \|v\|^2} = \sqrt{\|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle u|v \rangle) + \|v\|^2} \leq$$

$$\operatorname{Re}(z) \leq |z|$$

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

↖ komplexní člen se odečte

$$\langle u|u \rangle = \|u\|^2$$

$$\langle v|v \rangle = \|v\|^2$$

$$\langle u|v \rangle = \overline{\langle v|u \rangle}$$

$$|\langle u|v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

$$\leq \sqrt{\|u\|^2 + 2|\langle u|v \rangle| + \|v\|^2} \leq \sqrt{\|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2} =$$

$$= \sqrt{(\|u\| + \|v\|)^2} = \|u\| + \|v\|$$

(63.) Vysloste a dokažte pozorování o navzájem
kolmých vektorech

Pozorování: Množina netriviálních vzájemně
kolmých vektorů je lineárně nezávislá.

Důkaz:

(sporem)

Nechť $v_0, \dots, v_k$ jsou kolmé a chceme vyjádřit

$$v_0 = \sum_{i=1}^k a_i v_i \quad \text{pomocí ostatních vektorů lineární}$$

kombinací

Vyjádříme normu v_0 (velikost)

$$\langle v_0 | v_0 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k a_i v_i \mid v_0 \right\rangle = \sum_{i=1}^k a_i \langle v_i | v_0 \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^k a_i \cdot 0 = 0$$

linearity první složky skalárního
součinu

jsou kolmé, tedy
rovně 0

$\langle v_0 | v_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow v_0 = 0$, což je spor s netriviálními
vektory $v_0, \dots, v_k$ $\nmid$

→
pokud jsou vektory
lineárně nezávislé,
tak nulový vektor
může vyjádřit pouze
triviální lineární
kombinací

64. Vyslovte a dokažte tvrzení o Fourierových koeficientech

Věta:

Nechť $B = (b_1, \dots, b_m)$ je ortonormální báze prostoru V se skalárním součinem. Pak pro každé $v \in V$ platí, že jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci:

$$v = \langle v | b_1 \rangle b_1 + \langle v | b_2 \rangle b_2 + \dots + \langle v | b_m \rangle b_m$$

Kde $\langle v | b_i \rangle$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$ jsou Fourierovy koeficienty

Důkaz:

Protože B je báze V , tak vektor $v \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $v = \sum_{i=1}^m a_i b_i$ s koeficienty a_i

Abychom zjistili nějaký koeficient a_j , tak skalárně vynásobíme v vektorem báze b_j , protože

$$\langle v | b_j \rangle = a_1 \underbrace{\langle b_1 | b_j \rangle}_0 + \dots + a_j \underbrace{\langle b_j | b_j \rangle}_1 + \dots + a_m \underbrace{\langle b_m | b_j \rangle}_0$$

↖ z vlastnosti ortonormální báze $\|u\|=1$

Teď

$$\langle v | b_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m a_i b_i | b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m a_i \langle b_i | b_j \rangle = a_j$$

↑
tím získám
koeficient pro lineární kombinaci

$$\langle b_i | b_j \rangle = 0 \text{ pro } i \neq j$$
$$\langle b_i | b_j \rangle = 1 \text{ pro } i = j$$

↑
vlastnosti
ortonormální
báze

(65.) Vysloďte a dokažte větu o výpočtu skalárního součinu z Fourierových koeficientů

Věta:

Necht' $B = (b_1, \dots, b_n)$ je ortonormální báze vektorového prostoru V se skalárním součinem.

Pro každé $u, v \in V$ platí:

$$\langle u | v \rangle = [v]_B^H [u]_B$$

Důkaz:

$u, v \in V$ lze vyjádřit lineární kombinací z ortonormální báze

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u | b_i \rangle b_i$$

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v | b_j \rangle b_j$$

$$\langle u | v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle u | b_i \rangle b_i \mid \sum_{j=1}^n \langle v | b_j \rangle b_j \right\rangle =$$

↖ linearity a
antilinearity

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle u | b_i \rangle \overline{\langle v | b_j \rangle} \langle b_i | b_j \rangle =$$

↖ $\langle b_i | b_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$
 $\langle b_i | b_j \rangle = 1$ pro $i = j$

$$= \sum_{i=1}^n \langle u | b_i \rangle \overline{\langle v | b_i \rangle} = [v]_B^H [u]_B$$

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_1 \cdot \bar{v}_1 + u_2 \cdot \bar{v}_2 + \dots + u_n \bar{v}_n$$

(66.) Vyslozte a dokažte tvrzení o kolmé projekci a normě

Tvrzení:

Necht U je prostor se skalárním součinem a V je jeho podprostor s ortonormální bází $B = (b_1, \dots, b_m)$. Pak

zobrazení $p_B(u) : U \rightarrow V$ definované jako $p_B(u) = \sum_{i=1}^m \langle u | b_i \rangle b_i$

je ortogonální projekce.

Pak $p_B(u)$ je vektor z $V = \text{span}(B)$, který je nejblíže u v tom smyslu, že minimalizuje $\|u - p_B(u)\|$

Nebo-li pro $\forall v \in V : v \neq p_B(u) : \|u - v\| > \|u - p_B(u)\|$

Důkaz:

zvolím si $z = u - p_B(u)$

$w = p_B(u) - v \neq 0$ pro libovolný $v \in V : v \neq p_B(u)$

Vím, že z je kolmé na bázi podprostoru V , tedy $u - p_B(u) \perp b_i$ pro každé $b_i \in B$

Pak vím, že $\langle w | z \rangle = 0$, protože $w \in V$ a z je kolmé na podprostor V

Pak určíme $\|u - v\| = \|z + w\| = \sqrt{\langle z + w | z + w \rangle} =$

$$= \sqrt{\underbrace{\langle z | z \rangle}_0 + \underbrace{\langle w | z \rangle}_0 + \underbrace{\langle z | w \rangle}_0 + \underbrace{\langle w | w \rangle}_{>0}} = \sqrt{\langle z | z \rangle + \langle w | w \rangle} > \sqrt{\langle z | z \rangle} =$$

$$= \|z\| = \|u - p_B(u)\|$$

Tedy $\|u - v\| > \|u - p_B(u)\|$

(67.) Uveďte a dokažte správnost Gramova-Schmidtovy
ortonormalizace

Algoritmus : Gramova-Schmidtova ortonormalizace

převede bázi $(b_1, \dots, b_n)$ vektorového prostoru V se
skalárním součinem na ortonormální bázi $(d_1, \dots, d_n)$
téhož prostoru V .

Cykles pro každé $i = 1, \dots, n$:

1) zajištění kolmosti na předchozí vektory ortonormální báze

$$c_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle b_i, d_j \rangle d_j$$

2) normalizace, zajištění jednotkové délky

$$d_i = \frac{1}{\|c_i\|} c_i$$

Důkaz:

1) Díky lemma o odečtení projekce $u - p_B(u) = z$, kde

$$p_B(u) = \sum_{i=1}^n \langle u, b_i \rangle b_i, \text{ tak } z \perp b_i \text{ pro každé } b_i \in B$$

Teď $c_i \perp d_j$ pro $j < i$, a protože d_i je jen skalární
násobek c_i , tak $d_i \perp d_j$ pro $i \neq j$

2) pomocí linearity normy $\|d_i\| = \left\| \frac{1}{\|c_i\|} c_i \right\| = \frac{1}{\|c_i\|} \cdot \|c_i\| = \frac{\|c_i\|}{\|c_i\|} = 1$

$$\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\| \rightarrow$$

3) Pomocí lemmata o výměně

odečítání kolineárního vektoru

$$\text{span}(d_1, \dots, d_{i-1}, b_i) = \text{span}(d_1, \dots, d_{i-1}, c_i) =$$

c_i je složeno lineární kombinací předchozích d_j a ty jsou složeny lineární kombinací b_i původní báze, tedy c_i se dá vyjádřit jako lineární kombinace

jen skalární násobek

$$= \text{span}(d_1, \dots, d_{i-1}, d_i)$$

✓ Důsledek:

V podprostoru prostoru V se skalárním součinem, lze lze rozšířit ortonormální bázi V na ortonormální bázi U . $\dashv$

(68.) Vyslovte a dokažte větu o izometrii a normě.

Věta: Lineární zobrazení $f: W \rightarrow V$ mezi prostory

V a W se skalárním součinem je izometrie právě tehdy,

když $(\Leftrightarrow)$ zachovává normu:

$$\forall u \in V: \|u\| = \|f(u)\|$$

Důkaz:

1) $\Rightarrow$ (z izometrie plyne zachování normy)

$$\|f(u)\| = \sqrt{\langle f(u) | f(u) \rangle} = \sqrt{\langle u | u \rangle} = \|u\|$$

$\uparrow$ z definice normy

$\uparrow$ protože f je izometrie, tedy zachovává skalární součin

$$\forall u, v \in V: \langle u | v \rangle = \langle f(u) | f(v) \rangle$$

2) $\Leftarrow$ (z zachování normy plyne izometrie)

$$\|u\|^2 = \langle u | u \rangle \quad \|v\|^2 = \langle v | v \rangle$$

$$\|u + tv\|^2 = \langle u + tv | u + tv \rangle = \|u\|^2 + t \cdot \langle v | u \rangle + \bar{t} \langle u | v \rangle + t\bar{t} \|v\|^2$$

Protože zachovává normu

$$\|f(u + tv)\|^2 = \langle f(u + tv) | f(u + tv) \rangle = \|f(u)\|^2 + t \cdot \langle f(v) | f(u) \rangle +$$

$$+ \bar{t} \cdot \langle f(u) | f(v) \rangle + t\bar{t} \|f(v)\|^2$$

Porovnáme, a protože $\|u\| = \|f(u)\|$ a $\|v\| = \|f(v)\|$, tak je zkrácíme

$$t \cdot \langle v | u \rangle + \bar{t} \langle u | v \rangle = t \cdot \langle f(v) | f(u) \rangle + \bar{t} \cdot \langle f(u) | f(v) \rangle$$

pokud zachovává normu, tak i skalární součin

Pro reálnou část dosadím $t=1$

$$\langle v|u \rangle + \langle u|v \rangle = \langle f(v)|f(u) \rangle + \langle f(u)|f(v) \rangle$$

$$2\operatorname{Re}(\langle u|v \rangle) = 2\operatorname{Re}(\langle f(u)|f(v) \rangle)$$

Pro imaginární část dosadím $t=i$

$$\langle v|u \rangle - \langle u|v \rangle = \langle f(v)|f(u) \rangle - \langle f(u)|f(v) \rangle$$

$$2\operatorname{Im}(\langle u|v \rangle) = 2\operatorname{Im}(\langle f(u)|f(v) \rangle)$$

Pak pokud se shodují v reálné i imaginární části, pak se shodují jako celek, tedy:

$$\langle u|v \rangle = \langle f(u)|f(v) \rangle$$

(69.) Vyslozte a dokašte větu o charakterizaci
izometrie pomocí její matice

Věta:

Necht' V a W jsou vektorové prostory konečné dimenze se skalárním součinem a B a C jsou jejich ortonormální báze.

Pak lineární zobrazení $f: V \rightarrow W$ je izometrie

právě tehdy, když $(\Leftrightarrow)$ matice $[f]_{B,C}$ je unitární.
 $\Rightarrow$ každý krok je vratný

Důkaz:

Lineární bijektivní zobrazení f implikuje regularitu $[f]_{B,C}$ a naopak.

B je ortonormální, proto $\langle u | v \rangle = [v]_B^H [u]_B$

C je ortonormální, proto $\langle f(u) | f(v) \rangle = [f(v)]_C^H [f(u)]_C =$

$$= ([f]_{B,C} [v]_B)^H \cdot ([f]_{B,C} \cdot [u]_B) =$$

$$= [v]_B^H \cdot [f]_{B,C}^H \cdot [f]_{B,C} \cdot [u]_B$$

f je izometrie pokud $\langle u | v \rangle = \langle f(u) | f(v) \rangle$ nebo-li

$$[v]_B^H [u]_B = [v]_B^H \cdot [f]_{B,C}^H [f]_{B,C} [u]_B$$

nebo-li pokud

$\Rightarrow [f]_{B,C}$ je unitární

To platí pro všechna u a v právě, když $[f]_{B,C}^H [f]_{B,C} = I$

unitární v $\mathbb{C}$
 ortogonální v $\mathbb{R}$

když se skalární
 součin rovná $\rightarrow$

(70.) Vyslovte a dokažte větu o ortogonalitě a
prostorech určených maticí

Věta: Pro libovolnou reálnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí, že pro

každý vektor $u \in R_A$ a vektor $v \in \ker A$ platí $u \perp v$

vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Nebo-li $\ker A = (R_A)^\perp$

Důkaz:

1) $\text{rank}(A) = r$ označíme, tedy $\dim(R_A) = r$

Označíme báze $b_1, \dots, b_r$ prostoru R_A . Necht' BÚNO jsou to prvky, vůči nimž A .

$c_1, \dots, c_{n-r}$ označíme vektory báze $\ker(A)$ $\leftarrow \text{rank } A + \dim \ker A = n$

Z definice jádra platí, že pro všechny b_i a c_j platí

$b_i \perp c_j$, protože $\langle b_i | c_j \rangle = (Ac_j)_i = 0_i = 0$ $\leftarrow i$ -tá složka nulového vektoru

2) Vyjádříme si $u = \sum_{i=1}^r a_i b_i$ a $v = \sum_{j=1}^{n-r} d_j c_j$

$\langle u | v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r a_i b_i \mid \sum_{j=1}^{n-r} d_j c_j \right\rangle = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n-r} a_i d_j \langle b_i | c_j \rangle = 0$
 $\leftarrow$ linearita skalárního součinu $\leftarrow$ protože $\langle b_i | c_j \rangle = 0$ pro libovolné i a j

Tedy pro libovolné $u \in R_A$ a $v \in \ker A$ platí $u \perp v$

(71.) Vysloďte a dokažte větu o ortogonálním doplňku,
(mimo jiné o jeho dimenzi)

Věta:

Pro prostor U konečné dimenze se skalárním
součinem a jeho podprostor V platí:

1. $(V^\perp)^\perp = V$

2. $\dim V + \dim V^\perp = \dim U$

Důkaz:

Zvolím si ortonormální bázi $B = (b_1, \dots, b_k)$ prostoru V
a doplním na ortonormální bázi H prostoru U

Pak $C = H \setminus B = (c_1, \dots, c_l)$

1. $V^\perp = \text{span}(C)$

a) $\text{span}(C) \subseteq V^\perp$

Vezmu libovolné $u \in \text{span}(B)$ a $v \in \text{span}(C)$

$$\langle u | v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k a_i b_i \mid \sum_{j=1}^l d_j c_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_i \bar{d}_j \cdot \langle b_i | c_j \rangle = 0$$

Protože $b_i, c_j \in H$ a H je ortonormální báze, pak $\langle b_i | c_j \rangle = 0$
pro libovolné i a j

Protože pro libovolný vektor $v \in \text{span}(C)$ platí, že je kolmý
na libovolný vektor $u \in \text{span}(B)$, pak $\text{span}(C) \subseteq V^\perp$

z předchozí
věty $\rightarrow$

b) $V^\perp \subseteq \text{span}(C)$

Vezmu libovolný $w \in V^\perp$. Neboť je H ortonormální báze,
tak pro něj platí Fourierův rozvoj:

$$w = \sum_{i=1}^h \langle w | b_i \rangle b_i + \sum_{j=1}^l \langle w | c_j \rangle c_j$$

Neboť w je kolmé na všechny bázeové vektory b_i , $\leftarrow z$ věty
tak platí $\langle w | b_i \rangle = 0$ pro všechny $b_i \in B$, proto

$$w = \sum_{j=1}^l d_j c_j, \text{ nebo-li } w \in \text{span}(C)$$

Tedy libovolný vektor $z \in V^\perp$ je z prostoru $\text{span}(C)$

Tím, že platí obě inkluze, tak platí $V^\perp = \text{span}(C)$

2. Důkaz dimenze

$$\dim V + \dim V^\perp = |B| + |C| = |H| = \dim U$$

3. Důkaz $(V^\perp)^\perp$

$$(V^\perp)^\perp = \text{span}(H \setminus C) = \text{span}(B) = V$$

(72) Vysloďte a dokažte větu o skalárním součinu

dvou vektorů a gramovské matice

Věta:

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a bází $B = (b_1, \dots, b_n)$. Pak gramovská matice A definovaná $a_{ij} = \langle b_i | b_j \rangle$ splňuje:

$$\forall u, v \in V: \langle u | v \rangle = [v]_B^H A^T [u]_B$$

Důkaz:

$$\text{Označím si } [u]_B = (c_1, \dots, c_n)^T$$

$$[v]_B = (d_1, \dots, d_n)^T$$

$$u = \sum_{i=1}^n c_i b_i \quad \text{a} \quad v = \sum_{j=1}^n d_j b_j \quad (\text{lineární kombinace})$$

$$\langle u | v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i b_i \mid \sum_{j=1}^n d_j b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{d}_j \langle b_i | b_j \rangle =$$

$$= [v]_B^H A^T [u]_B$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{d}_j \cdot \sum_{i=1}^n a_{ij} c_i$$

indexuje přes j -tý sloupec a i -tý řádek tedy $A^T [u]_B$

1) gramovská matice je hermitovská, protože $\langle b_i | b_j \rangle = \overline{\langle b_j | b_i \rangle}$

$$\text{nebo-li } a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

2) $\langle v | v \rangle > 0$ pro $v \neq 0$, pak $[v]_B^H A^T [v]_B > 0$

hermitovská transpozice se mění na normální transpozici v reálném oboru

Když B je ortonormální, pak

$$A = I_n$$

z přechodové věty

A^T , protože ΔA to vyjde špatně

axiom pozitivní definitnosti skalárního součinu

73. Uveďte a dokažte tři pozorování o vlastnostech
pozitivně definitních matic vzhledem k maticovým
operacím

Pozorování č.1: Pokud je A pozitivně definitní, pak i
 $A+B$ je pozitivně definitní.

Důkaz č.1:

Pro libovolný $v \neq 0$ platí:

$$v^H (A+B) v = \underbrace{v^H A v}_{>0} + \underbrace{v^H B v}_{>0} > 0$$

Pozorování č.2: Pokud je A pozitivně definitní a R je
 regulární, pak $R^H A R$ je také pozitivně definitní.

Důkaz č.2

→ plyne z regularity R

Pro libovolné $v \neq 0$ zavedu substituci $u = Rv \neq 0$

$$(Rv)^H \cdot A \cdot (Rv) = \underbrace{v^H R^H}_{u^H} A \cdot \underbrace{R \cdot v}_u = u^H A u > 0$$

Důkaz č.2:

Bud' je pozitivně
 definitní A i $R^H A R$
 nebo ani jedno

Pozorování č.3 Pokud je A pozitivně definitní, tak je regulární a
 inverze A^{-1} je také pozitivně definitní.

Důkaz č.3: 1) Regularita A : (sporem) pokud by matice A byla

singulární, tak existuje $v \neq 0$, pro které platí $Av = 0$, pak $v^H A \cdot v = v^H 0 = 0$,

2) A^{-1} je také pozitivně definitní: $A = A^H$

$$(A^{-1})^H = (A^{-1})^H A \cdot A^{-1} = (A^{-1})^H \cdot A^H \cdot A^{-1} = (A A^{-1})^H \cdot A^{-1} = I^H \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

Pomocí pozorování 2: $A^{-1} = R \Rightarrow (A^{-1})^H A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1}$ a A^{-1} je PD

což je spor s pozitivní
 definitností A

inverzní k hermitovské
 je hermitovská

(74.) Vysloste a dokažte tvrzení o pozitivní definitnosti
blokové matice

Tvrzení:

$$\begin{matrix} A \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ B \in \mathbb{C}^{m \times m} \end{matrix} \rightarrow$$

Hermitovská bloková matice $\begin{pmatrix} A & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B \end{pmatrix}$ je
 pozitivně definitní právě když $(\Leftrightarrow)$ A i B jsou
 pozitivně definitní.

Důkaz:

1) $\Leftarrow$ z PD částí plyne PD celku

alespoň $v \neq 0$
 nebo $u \neq 0$

zvolím si $w = (v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{C}^{n+m}$; $w \neq 0$

Pak

$$w^H \begin{pmatrix} A & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B \end{pmatrix} w = \underbrace{v^H A v}_{> 0 \Leftrightarrow v \neq 0} + \underbrace{u^H B u}_{> 0 \Leftrightarrow u \neq 0} > 0$$

$> 0 \Leftrightarrow v \neq 0$ $> 0 \Leftrightarrow u \neq 0$

plyne z PD
 A i B

2) $\Rightarrow$ z PD celku plyne PD částí

Vezmu si libovolný vektor $v \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ a doplním nulami

na $w = (v_1, \dots, v_m, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{C}^{n+m}$. Platí tedy $w \neq 0$

Pak

$$v^H A v = w^H \begin{pmatrix} A & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B \end{pmatrix} w > 0$$

obdobně pro B

$\nwarrow$ protože bloková matice je
 PD z předpokladu

75. Vyslovte a dokažte větu o třech ekvivalentních podmínkách pro pozitivně definitní matice

Věta: Pro hermitovskou matici A jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Matice A je pozitivně definitní
2. Všechna vlastní čísla matice A jsou kladná
3. Existuje regulární matice U taková, že $A = U^H U$

Důkaz:

1. $\Rightarrow$ 2.

Nechť v je nenulový (nekvadratický) vektor odpovídající vlastnímu číslu λ matice A , která je hermitovská, tedy má všechna vlastní čísla reálná.

$$\text{Platí tedy } 0 < v^H A v = v^H \lambda v = \lambda \cdot (v^H v) = \lambda \cdot \langle v | v \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle v | v \rangle &> 0 \\ \text{pro } v \neq 0 \\ \text{pak i } \lambda &> 0 \end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ 3.

Protože A je hermitovská, tak existuje unitární R a diagonální D

taková, že $A = R^H D R$

Definujeme si matici $\tilde{D}$, kde $\tilde{d}_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$ (odmocniny z D na diagonále)

Pak definujeme $U = \tilde{D} R$. Pak $U^H U = (\tilde{D} R)^H (\tilde{D} R) = R^H \tilde{D}^H \tilde{D} R = R^H D R = A$

U je regulární, protože unitární R i diagonální $\tilde{D}$ jsou regulární.

3. $\Rightarrow$ 1.

Zvolím $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, pak pro regulární U platí $(Uv) \neq 0$

Pak

$$v^H A v = v^H (U^H U) v = (Uv)^H \cdot (Uv) = \langle Uv | Uv \rangle > 0 \quad \begin{aligned} &\rightarrow \text{protože } Uv \neq 0 \\ &\rightarrow \text{platí definice PD pro matice } A \end{aligned}$$

(76.) Uveďte a dokažte větu o Choleského rozkladu
včetně správnosti algoritmu pro výpočet

Věta: Pro každou pozitivně definitní matici A existuje právě jedna horní trojúhelníková matice U s reálnou kladnou diagonálou taková, že

$A = U^H U$. Kele U se nazývá Choleského rozklad.

Algoritmus

Vstup: Hermitovská matice A

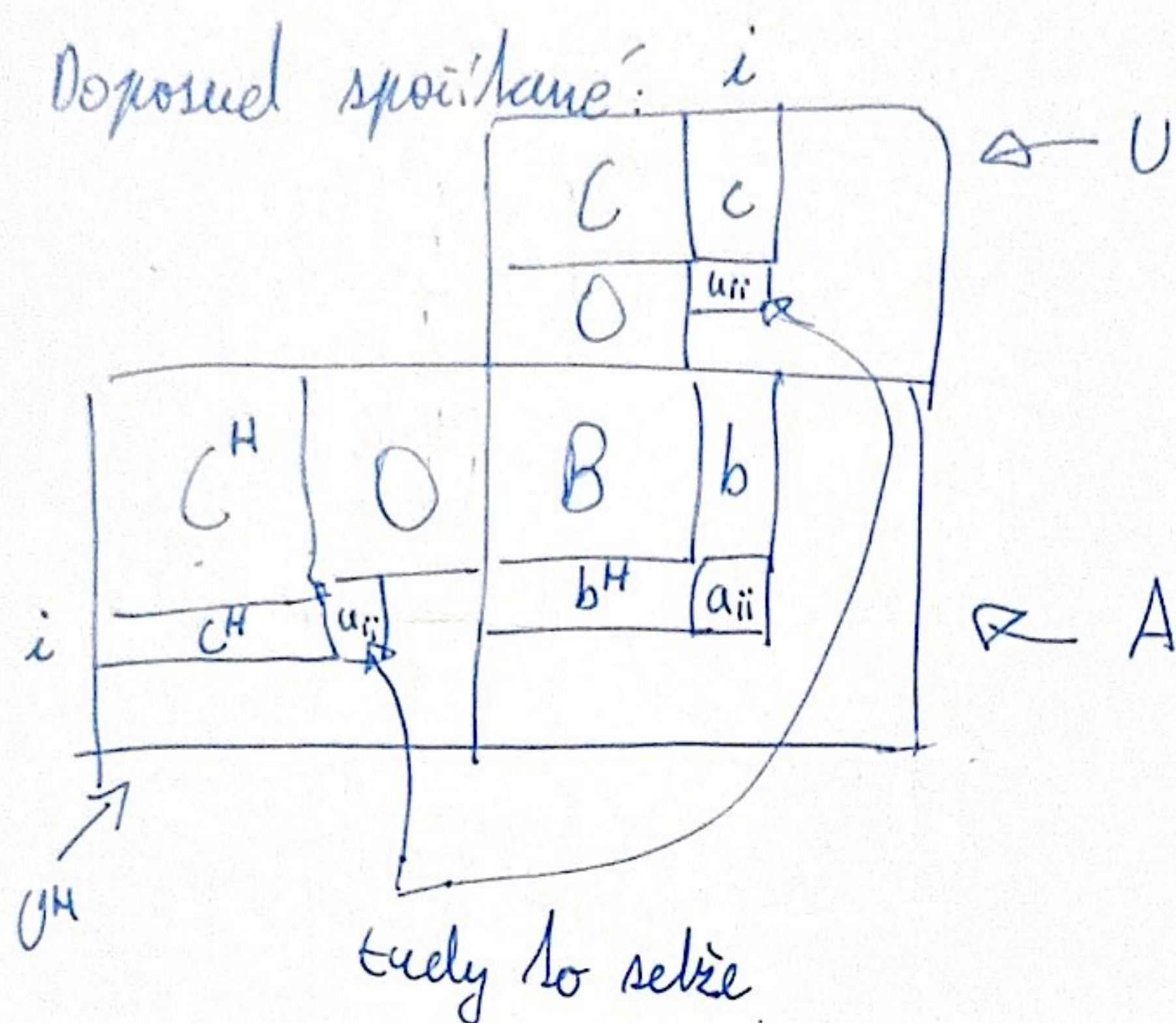
Výstup: Choleského rozklad U , pokud je A pozitivně definitní

```
for  $i = 1, \dots, n$ :  
    
$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}} u_{ki}}$$
  
    if  $u_{ii} \in \mathbb{R}^+$ , tak  $A$  není pozitivně definitní  
    for  $j = i+1, \dots, n$   
        
$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}} u_{kj} \right)$$
  
    end  
end
```

Důkaz:

$\Leftarrow$ Algoritmus uspěl, pak ověřením, že $U^H U = A$ ↖ násobením

$\Rightarrow$ (Algoritmus selže při výpočtu u_{ii})



Označení

$$B = C^H C$$

$$b = C^H \cdot c$$

B $\Leftarrow$ první $(i-1)$ řádků a sloupců A

b $\Leftarrow$ první $(i-1)$ prvků i -tého sloupce A

$\Leftarrow$ podobně pro spočtenou část U

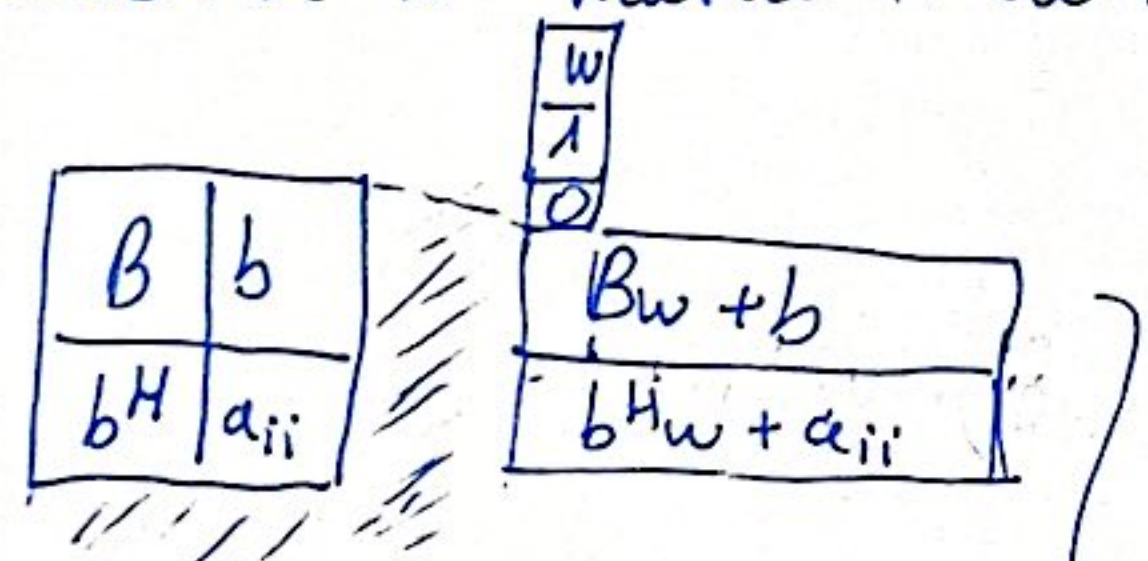
Výpočet u_{ii} selže, protože $a_{ii} \leq C^H C \Leftarrow$ odhadnuta ze záporného čísla, A není PD

Definuji si vektor $v^T = (-w^T, 1, 0_{n-i}^T) \in \mathbb{C}^n$, kde

$$w \equiv -C^{-1} \cdot c$$

$\Leftarrow$ nabírám nulový vektor v pro který platí $v^H A v \leq 0$

vynásobím s matricí A do druhé, kdy selhala $v^H A v$



$$w^H B w + w^H b + b^H w + a_{ii}$$

$$B = C^H C$$

$$v^H A v = w^H B w + w^H b + b^H w + a_{ii} = (-C^{-1} \cdot c)^H \cdot C^H C (-C^{-1} \cdot c) +$$

$$+ (-C^{-1} \cdot c)^H \cdot C^H (c + (C^H C) \cdot (-C^{-1} \cdot c)) + a_{ii} = \cancel{C^H C} - \cancel{C^H C} - C^H C + a_{ii} \leq 0$$

$\Leftarrow$ protože $a_{ii} \leq C^H C$

Proto A není pozitivně definitní.

(77.) Vypíšte a dokažte větu o rekurentní podmínce pro pozitivně definitní matice

Věta: Bloková matice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & b^H \\ b & B \end{bmatrix}$ je

pozitivně definitní právě tehdy, když $a_{11} \in \mathbb{R}^+$ a matice

$B - \frac{1}{a_{11}} b b^H$ je pozitivně definitní.

Důkaz:

Matici A vynásobím zleva maticí elementárních úprav na vynulování prvního sloupce pod a_{11}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0^H \\ -\frac{1}{a_{11}} b & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & b^H \\ b & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & b^H \\ 0 & B - \frac{1}{a_{11}} b b^H \end{bmatrix}$$

Neboť E je regulární, tak lze napsat $EA \cdot E^H =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0^H \\ -\frac{1}{a_{11}} b & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & b^H \\ b & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}} b^H \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0^H \\ 0 & B - \frac{1}{a_{11}} b b^H \end{bmatrix}$$

Právě když výsledná matice má dva bloky pozitivně definitní, tak matice A je pozitivně definitní

(78.) Vysloďte a dokažte větu o pozitivně definitních maticích a determinantech

Věta:

Hermitská matice A řádu n je pozitivně definitní právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \det(A_i) > 0$$

kde A_i je podmatice A tvořená prvými i řádky a i sloupci.

Důkaz:

Použijeme Gaussovu eliminaci na zjištění pozitivní definitnosti matice A , kde $a_{11}, \dots, a_{nn}$ jsou prvky na diagonále horní trojúhelníkové matice

plyne z rekurentní podmínky

Pak protože přičtení násobku jednoho řádku k jinému nemění determinant, tak platí:

$$\det(A_i) = \det(A'_i) = \prod_{j=1}^i a'_{jj} = \det(A_{i-1}) \cdot a'_{ii}$$

Pak jsou následující ekvivalentní

1. A je pozitivně definitní $\Leftrightarrow$

2. $a_{11}, \dots, a_{nn} > 0 \Leftrightarrow$

3. $\det(A_1), \dots, \det(A_n) > 0$

(79.) Vyslovte a dokažte vetu o diagonalizovateľnosti
matice forem

Veta:

Pro jakoukoli symetrickou matici $A \in T^{n \times n}$ s $\text{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice R taková, že $R^T A R$ je diagonální

Důkaz:

Indukcí podle řádku matice n

1) $n=1$

Každá matice je diagonální. Tedy pro další krok předpokládáme, že platí pro matice řádku $n-1$.

2) $n-1 \rightarrow n$

Označím si $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix}$

a) $a_{11} \neq 0$

- pomocí matice elementárních úprav $P_n = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}} b^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$ symetricky vynásobím zleva i zprava

$$\begin{aligned} P_n^T A_n P_n &= \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ -\frac{1}{a_{11}} b & I_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}} b^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ 0 & B - \frac{1}{a_{11}} b b^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}} b^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0^T \\ 0 & B - \frac{1}{a_{11}} b b^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0^T \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kde $A_{n-1} = B - \frac{1}{a_{11}} b b^T$ je symetrická

↑
symetrická

Pak můžeme dle indukčního předpokladu uvažovat pro

A_{n-1} regulární matici R_{n-1} a pomocí ní dopočítat R_n

Protože hledáme matici R_n , tak si označíme pomocnou

matici $M_n = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{n-1} \end{bmatrix}$

↖ zaobalíme uškrtem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0^T \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix}$$

Pak z $R_n^T A_n R_n = M_n^T (P_n^T A_n P_n) M_n = (P_n M_n)^T A_n (P_n M_n)$

Pak hledaná matice R_n je $R_n = P_n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{n-1} \end{bmatrix}$

↙ vynásobením

Pak $R_n^T A_n R_n = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{n-1} \end{bmatrix} \cdot P_n^T A_n P_n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0^T \\ 0 & R_{n-1}^T A_{n-1} R_{n-1} \end{bmatrix}$ je diagonální.

b) $a_{11} = 0 \wedge b \neq 0$

1) $a_{ii} = 0$

Pak pro nějaké a_{ii} platí $a_{ii} \neq 0$ pak lze použít matici elementárních úprav a $A'_n = E^T A_n E$, pak

$a'_{ii} = 2a_{ii} \neq 0$, protože $\text{char}(T) \neq 2$ a $a_{ii} \neq 0$

2) $a_{ii} \neq 0$

Pak lze použít matici elementárních úprav a

$A'_n = E^T A_n E$, kde zaměníme i -tý a 1. sloupec a i -tý a 1. řádek

c) $a_{11} = 0 \wedge b = 0$

Pak $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix}$, kde $A_{n-1} = B$ a $R_n = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_{n-1} \end{bmatrix}$

(80.) Uved'te a dokažte Sylvesterův zákon setrvačnosti -

o diagonalizaci kvadratických forem

Věta:

Každá kvadratická forma na konečně generovaném reálném vektorovém prostoru má diagonální formu s hodnotami 1, -1 a 0 na diagonále. Všechny takové diagonální matice vůči stejné kvadratické formě mají stejný počet 1 a -1.

Důkaz:

1) Existence

kvadratické

A je matice formy vzhledem k bázi B

Pak jakákoliv symetrická matice lze diagonalizovat, tedy

$A = R^T D' R$, kde D' je diagonální a R regulární.

Abychom získali 1, -1 a 0 na diagonále zavedeme matici S , aby splňovala

$D' = S^T D S$, pro které platí:

$$\begin{cases} d'_{ii} = 0 : d_{ii} = 0 \text{ a } s_{ii} = 1 \\ d'_{ii} > 0 : d_{ii} = 1 \text{ a } s_{ii} = \sqrt{d'_{ii}} \\ d'_{ii} < 0 : d_{ii} = -1 \text{ a } s_{ii} = \sqrt{-d'_{ii}} \end{cases}$$

Pak lze dosadit: $A = R^T S^T D S R = (SR)^T D SR$

kde SR je regulární

Pak sloupce $(SR)^{-1}$ budou sloupce báze C , tedy $[id]_{C,B} = (SR)^{-1}$. A matice

$$D = [id]_{C,B}^T A [id]_{C,B} = (SR)^{-1 T} A (SR)^{-1}$$

proste pokud $d'_{ii} \neq 0$, pak odmocnina z absolutní hodnoty, jinak 1 u S a u D uděleno absolutní hodnotou d'_{ii}

Signatura formy
je trojice

(#1, #-1, #0)

počítáno na
diagonální matici
té formy.

diagonální matice
vůči bázi C

$$(SR)^{-1 T} (SR)^T D SR (SR)^{-1} =$$

2) Jednoznačnost páru $1, -1$ a 0

Nechť $B = (b_1, \dots, b_m)$ a $C = (c_1, \dots, c_n)$ jsou dvě báze, kde matice kvadratické formy g má na diagonále $1, -1$ a 0 ↖ tedy matice B a C

B.U.N.O. si uspořádám vektory v bázích B a C , aby v matici kv. formy byly na diagonále první 1 , pak -1 , pak 0 .

Protože převedení bází je součin regulární matice $[id]_{C,B}$, tak se nemění hodnota matice.

Proto $\#0$ v $B = n - \text{rank}(B) = n - \text{rank}(C) = \#0$ v C ↖ $C = [id]_{C,B}^T \cdot B \cdot [id]_{C,B}$

Označím $r = \#1$ v B a $s = \#1$ v C

Pro spor $r > s$:

2 podprostory: $U = \text{span}(b_1, \dots, b_r)$ a $\dim U = r$ ↖ z jedniček

$V = \text{span}(c_{s+1}, \dots, c_n)$ a $\dim V = n - s$ ↖ z nul a mínus jedniček

Pomocí relky $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(\text{span}(U \cup V))$

$$\dim(U \cap V) = r + (n - s) - n = r - s \geq 1$$

↖ z přehlédnutí, tedy existuje netriviální vektor z průniku

Takže lze vzít $v \in (\text{span}(b_1, \dots, b_r) \cap \text{span}(c_{s+1}, \dots, c_n)) \setminus \{0\}$ ↖ $v \in U \cap V \setminus \{0\}$

$v \neq 0$, nechť lze vyjádřit: $[v]_B = (a_1, \dots, a_r, 0, \dots, 0)^T$ $[v]_C = (0, \dots, 0, d_{s+1}, \dots, d_n)^T$
↖ definice kv. formy na vyjádření z matice

$$g(v) = [v]_B^T B [v]_B = a_1^2 + \dots + a_r^2 > 0$$

↖ vlastně lze vyjádřit lineární kombinací vektorů z B
↖ protože alespoň jedno je nenulové

$$g(v) = [v]_C^T C [v]_C = -d_{s+1}^2 - \dots - d_n^2 \leq 0$$

↖ protože alespoň jedno je nenulové
↖ $d \neq 0$ nebo $a \neq 0 \rightarrow$ i zároveň kladné zajišťuje druhá rovnice

Spor, že $g(v) > 0 \wedge g(v) \leq 0$, tedy $r \neq s$ a $r \neq s$, proto $r = s$

(81.) Vysloďte a dokažte větu o počtu přímek svírajících
stejný úhel.

Věta: V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^d$ může existovat
nejvýše $\binom{d+1}{2}$ přímek takových, že každá dvojice
spolu svírá stejný úhel.

Důkaz:

Necht' existuje n takových přímek.

Z každé si zvolíme vektor jednotkové délky, pro které
platí: (tedy pro vektory $v_1, \dots, v_n$)

$$\langle v_i | v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pro } i=j \\ \cos \varphi & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{— konstanta úhlu} \\ \text{(ukáže se libovolný} \\ \text{nekvivální)} \end{array}$$

ukáže se, že jsou
lineárně
nezávislé $\rightarrow$

$v_1 v_1^T, \dots, v_n v_n^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ jsou symetrické matice.

Dimenze symetrických matic je pak $\binom{d+1}{2} = \frac{d(d+1)}{2} =$

$$a \quad m \leq \binom{d+1}{2} \quad (\text{pro počet přímek}) \quad = 1 + \dots + d$$

nekviv. kvivální/
nekvivální, ale
existuje $\rightarrow$

Předpokládám, že existuje lineární kombinace těchto matic,
abych získal nulovou matici
přijma diagonále a
null m', kolik konstant

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i v_i^T = O_{d,d}$$

Pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$\triangleleft$ proložení násobím nulou

$$0 = v_j^T 0_{d,d} v_j = v_j^T \left(\sum_{i=1}^n a_i v_i v_i^T \right) \cdot v_j =$$

$\triangleleft$ skalární součiny nad $\mathbb{R}$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_j^T \cdot v_i \cdot v_i^T \cdot v_j = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \langle v_i | v_j \rangle^2 =$$

$\triangleleft$ z předpokladu

$\triangleleft$ pro $i=j$ $\langle v_i | v_j \rangle = 1$

$$a_j + \cos^2 \varphi \cdot \sum_{i \neq j} a_i$$

$\leftarrow$ dostanu číslo
prostě
kvadratickou
formu

Γ pak v matici

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos^2 \varphi & \dots & \cos^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi & 1 & \dots & \cos^2 \varphi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos^2 \varphi & \cos^2 \varphi & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\perp$

$\hookrightarrow$ pro $\varphi = 0$ nebo $\varphi = 180^\circ$, pak je matice singulární, protože $\cos \varphi = 1$

$\hookrightarrow$ kdy pro $\varphi \neq 0$ a $\varphi \neq 180^\circ$ je matice regulární a

matice $v_1 v_1^T, \dots, v_n v_n^T$ jsou lineárně nezávislé

$\Rightarrow$ jen triviální
řešení

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

1. definice determinanta pomocí permutací

2. definice determinanta pomocí Laplaceova rozvoje

3. vztahy, co pro determinant platí vzhledem k matricovým operacím

(82) Přehledově sepište, co víte o výpočtu determinantů

Definice determinanta pomocí permutací = "Leibnizova formule"

$$|A| = \det A = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,p(i)} \quad , \text{ kde } S_n \text{ je symetrická grupa}$$

všech permutací na množině $\{1, \dots, n\}$ a $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^{\# \text{inverzí}}$

ukážka: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} a_{12}$

Sarrusovo pravidlo pro matice řádky 3×3 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} + \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{matrix}$$

Pozorování : $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ má nulový řádek

"protože každý součin $\sum \prod_{i=1}^n a_{i,p(i)}$ obsahuje člen z nulového řádku"

Pozorování : $\det A_n = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \Leftrightarrow A$ je trojúhelníková nebo diagonální

"protože každá permutace kromě identity obsahuje $a_{i,p(i)}$ nulový člen"

Pozorování : $\det(A) = \det(A^T)$

"zaměníme permutaci $p(i)=j \Leftrightarrow p^{-1}(j)=i$ a $q=p^{-1}$, což vlastně projde stejné sčítance a součiny, ale v jiném pořadí, tzv. bijekce"

Pozorování : $\det(B) = \operatorname{sgn} q \cdot \det(A)$ po přerozdání sloupců matice A pomocí permutace q .

"protože složení permutací $p \circ q = r$ je bijekce"

definice
přeuspořádaní řádků

$\Rightarrow$ protože $\det(A) = \det(A^T)$, tak to platí i pro přerozdání řádků pomocí q

$\Rightarrow$ výměna 2 řádků/sloupů změni znaménko permutace

$\Rightarrow$ pokud má determinant A nad T s $\operatorname{char} T \neq 2$ dva stejné sloupce / řádky, tak $\det(A) = 0$

$\Rightarrow$ počet sčítanců determinantu, tedy velikost symetrické grupy je $|S_n| = n!$

$\Rightarrow \det(tA) = t^n |A|$

$\Rightarrow$ otočením matice o 90° se determinant změni, např. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

ovácením determinantu podle volkové ay (řádky v opačném pořadí) změni
naménko podle $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, kde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ je počet výměn (transpozic)

ložení s permutací $p \rightarrow q \circ p$ je bijekce díky vlastnosti grup: inverze prvky a asociativita
k změnit prvek matice a determinant se nezmění a pokud jsou 2 nulové řádky tak lze změnit libo
prvek a determinant bude

Determinant matice je lineárně závislý na každém jejím
řádku a sloupci. Vzhledem ke skalárnímu násobku a součtu řádků

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t a_{i1} & \dots & t a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Důsledek

Přičtení skalárního násobku řádku/sloupce k jinému se determinant nezmění

Pokud je A singulární, pak $\det(A) = 0$ (protože přičtení násobek k jinému řádku/sloupci,
vynuluje ho, ale determinant se nezmění)

Výpočet determinantu lze provést Gaussovou eliminací a pak determinant
je součin prvků na diagonále

Věta: Pro libovolné $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

Důsledek: $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Důsledek: A je regulární $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Definice determinantu Laplaceovým rozvojem

Pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$ a $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ij})$$

Pokud má $\det(A) = 4$, kde $A \in \mathbb{Z}_5^{n \times n}$, pak $\det(A^3) = \det A \cdot \det A \cdot \det A = 4^3 = 4$

~~$\det(A+B) = \det A + \det B$~~

neplatí

jen pokud $A=0$

pro singulární, kde
 $0=0$

A^{ij} odstraní i-tý
řádek a j-tý sloupec

1. definice adjungované matice

2. Cramerovo pravidlo

3. Cayleyova-Hamiltonova věta

(83.) Přehledově sepišle, co víte o aplikacích determinantů?

Definice adjungované matice

$$(\text{adj} A)_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij}) \quad \text{kde } A^{ij} \text{ je pochmutice odstraněním } i\text{-tého řádku a } j\text{-tého sloupce}$$

Věta: Pro regulární matici $A \in T^{n \times n}$, $n \geq 2$ platí:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A$$

Věta: (Cramerovo pravidlo)

Nechť $A \in T^{n \times n}$ a $b \in T^n$ je vektor pravých stran a $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in T^n$, pak pro řešení $Ax = b$ platí: $x_i = \frac{\det A_{i \rightarrow b}}{\det A}$, kde $A_{i \rightarrow b}$ je matice vzniklá nahrazením i -tého sloupce vektorem pravých stran b .

Věta: (Cayleyova-Hamiltonova věta)

Každá čtvercová matice $A \in T^{n \times n}$ je kořenem svého charakteristického polynomu, nebo-li platí pro char. polynom

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \quad \text{platí}$$

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 = O_{n,n}$$

Věta: Pro $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ je objem n-objemového tělesa R daného

$u_1, \dots, u_n$ roven $|\det A|$, kde $u_1, \dots, u_n$ jsou sloupce / řádky matice A

Důstředek: Pro lineární lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a

tělesa, jehož objem je $\text{vol}(V)$ se při provedení zobrazení změně objem. Kde $[f]_{B,B}$ je matice lin. zobrazení vůči nějaké bázi B .

$$\text{vol}(f(V)) = |\det([f]_{B,B})| \cdot \text{vol}(V)$$

pokud $\det A_{i \rightarrow b} = 0$, pak je jen i -tá složka 0

Na výpočet inverzní matice A^{-1} je potřeba $O(n^5)$ operací pomocí
adjungované matice, kdy řešíme poddeterminanty Gaussovou eliminací. $\leftarrow n^2$ členů
 n^3 Gauss. elim.

A je celočíselná a A^{-1} je celočíselná $\Leftrightarrow \det A = \pm 1$ $\leftarrow$ vychází z $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A$

Adjungovaná k singulární Jordanově matici je také singulární $\leftarrow$ vždy platí

Cramerovo pravidlo - $O(n^4)$, Gauss. eliminace - $O(n^3)$ pro
řešení $Ax=b$ $\uparrow$ musí počítat $n+1$ determinanta a každý $O(n^3)$

protože platí $A \cdot \text{adj} A = \det A \cdot I$, pro singulární $A \cdot \text{adj} A$, tak
všechny sloupce $\text{adj} A$ patří jeho vektory do $\ker A$

$$A \cdot \text{adj} A = \det A \cdot I$$

1. rekurence pro počet koster

(84.) Přehledově sepište, co víte o výpočtu koster grafu pomocí determinantu

2. definici Laplaceova matice multigrafu a řádku

rekurentní vztah pro počet koster

$$K(G) = K(G-e) + K(G \circ e)$$

e nulově obsahující (koster)

✓ pokud se sloupe nesouvisí, tak $K(G-e) = 0$

neobsahuje e

kde $K(G)$ je počet koster grafu G , $G-e$ je odebrání hrany e , $G \circ e$ je kontrakce hrany e mezi vrcholy u a v , které se spojí do jednoho

může vzniknout násobné hrany nebo smyčky

Definice (multigrafu): má násobné hrany a smyčky ale pro jeho

kostky platí: • neobsahuje smyčky

• každé vstáknuté násobné hrany patří jiné kostce

Definice (Laplaceova matice):

Laplaceova matice grafu G s $V_G = \{v_1, \dots, v_n\}$ se značí $L_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a platí pro ni:

$$(L_G)_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{pro } i=j \\ -1 & \text{pro } i \neq j \text{ pokud } (v_i, v_j) \in E_G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

L_G je singulární, protože sečtením všech řádků dostaneme nulový

Pokud G není souvislý, tak i L_G^{11} je singulární

Pro multigrafy platí

$$(L_G)_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) \text{ s násobnostmi bez smyček} & \text{pro } i=j \\ -\text{násobnost } (v_i, v_j) \in E_G & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Věta: Pro každý multigraf G s $|V_G| \geq 1$ platí $K(G) = \det L_G^{11}$

L_G^{11} a L_G^{66} se liší jen permutací řádků a sloupců

G a G' jsou izomorfní, přeznačení vrcholů

Obecně platí $\det L_G^{ij} = (-1)^{i+j} \det L_G^{11}$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$

Cayleyho vzorec

Pro úplný graf K_n platí $K(K_n) = n^{n-2}$

Γ Laplaceova matice úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$ má $2mn$ mínus jedniček.. $\rightarrow$ má mn hran a v Laplaceově bude 2x
počet koster cyklu rekurence $K(G_n) = K(C_{n-1}) + K(P_n) = \underbrace{n-1}_{\text{mínus symetrický}} + \underbrace{1}_{\text{podle diagonály}} = n$

Strom Γ má jednu koster; $L_{\Gamma}^{1,n} = (-1)^{n+1} \cdot \det L_{\Gamma}^{1,1} = (-1)^{n+1} \cdot 1$

Pro výpočet koster nesouvislého grafu, tedy maximální podgraf bez cyklů, tak se musí počítat bloky na Laplaceovy matici zvlášť.

Pokud se u rekurence $K(G) = K(G-e) + K(G \circ e)$ uhere za hranu e souvisla, tak $K(G \circ e) = 0$, tedy $K(G) = K(G-e)$

artikulace v Laplaceově matici drží bloky pohromadě a v mostě to samé

1. definice Vandermondova matice

2. Lagrangeova interpolace
užití a popis

(85.) Přehledové sešite, co víte o polynomech, jejich vlastnostech a aplikacích.

polynom stupně n je $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, kde $a_n \neq 0$ a $a_0, \dots, a_n \in T$

Malé Fermatova věta

$\forall$ prvočíslo p a každé $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} : x^{p-1} = 1$

Důsledek

Pro libovolné $x \in \mathbb{Z}_p : x^p - x = 0$ nebo-li $x^p = x$ takž pro

každý polynom stupně n např. $r(x)$ existuje polynom stupně nejvýše $n-1$, např. $q(x)$, že $r(x) = q(x)$ na $\mathbb{Z}_p$

pro $p \in T(x)$ Násobnost kořene r z nemulového polynomu je největší k taková, že $(x-r)^k$ dělí p

Algebraicky uzavřené těleso stupně alespoň 1 má kořen

Základní věta algebry $p \in \mathbb{C}(x)$ každý má alespoň 1 kořen

Vandermonдова matice

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

matice regulární $\rightarrow$
pokud $x_0, \dots, x_n$
jsou různé

$$\det V_{n+1} = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

$\nearrow$
takhle zjistím
průsečíky s osou x

$\hookrightarrow$ pokud mám $n+1$ dvojic (x_i, y_i) a chci zjistit polynom, co jimi prochází

$\hookrightarrow$ řešením $V_{n+1}(x_0, \dots, x_n)$ Vandermonďova matice je $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ (koeficienty)

Definice Lagrangeovy interpolace

alternativní způsob interpolace skrz $n+1$ bodů

$$p_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{navrženo tak, aby } p_i(x_i) = 1 \text{ a } p_i(x_j) = 0 \text{ pro } i \neq j \end{array} \right.$$

pak výsledný polynom je $p(x) = \sum_{i=0}^m y_i p_i(x)$ $\leftarrow$ lineární kombinace, aby y_i bylo tam, kde se to rovná 1

Aplikace 1

n klíčů na odečtení, navrhní m klíčů, aby šlo odečíst s m klíči.

polynom stupně $n-1$ a m různých dvojic $(x_i, p(x_i))$ a tajný kód je polynom

Aplikace 2

vynešení dvou čísel v $O(n^2)$

interpretují jako polynomy p a q stupně $n-1$

vyberu 2m čísel a vyhodnotím dvojice $(i, p(i), q(i))$

pak interpolace v $O(n \log n)$

pro polynom p nad $\mathbb{Z}_5$ stupně nejvýše 4 máme 625 prvků, protože 1 vázaný a 4 volné

1. je nadefinovat:
pro lin. zobrazení

2. zavést různé
násobnosti

3. popsat algebraické
vlastnosti množin
vlastních vektorů

86. Přehledové sešite, co víte o vlastních číslech a vlastních vektorech matic

Definice vlastního čísla a vlastního vektoru (přes lin. zobrazení)

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a
 $f: V \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak $\lambda \in T$ je vlastní
číslo pokud splňuje $f(v) = \lambda \cdot v$ pro $v \in V \setminus \{0\}$

Vlastní vektor příslušící vlastnímu číslu λ je vektor
 $v \in V$ splňující $f(v) = \lambda \cdot v$

Definice vl. čísla a vl. vektoru pomocí matice

Nechť $A \in T^{n \times n}$, pak vl. číslo $\lambda \in T$ splňuje rovnici

$A \cdot v = \lambda \cdot v$ pro $v \in V \setminus \{0\}$, vl. vektor ^(příslušící λ) je libovolný
vektor, co splňuje $A \cdot v = \lambda \cdot v$

Spektrum je množina všech vlastních čísel matice

pro diagonální matici platí, že prvky na diagonále
jsou vlastní čísla a vlastní vektory jsou vektory kanonické
báze

Pozorování: vlastní vektory příslušící stejnému vlastnímu
číslu tvoří podprostor

Geometrická násobnost vlastního čísla

↳ geometrická násobnost je dimenze podprostoru vlastních
vektorů vlastního čísla

pokud jsou různé, tak
→
standardní báze,
jinak je možné
i jiné vektory pokud
má λ alg. násobnost
větší než 1

'algebraická' násobnost vlastního čísla

$\hookrightarrow$ je to násobnost kořene charakteristického polynomu daného $\det(A - I_n x) = p_A(x)$, nebo-li největší k , že $(x - \lambda)^k$, kde λ je vl. číslo dělí $\det(A - I_n x)$

Lineární nezávislost mezi různými podprostory

Necht' $f: V \rightarrow V$ je lin. zobrazení a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ různé vlastní čísla $v_1, \dots, v_k$ jsou vlastní vektory jim příslušící, pak $v_1, \dots, v_k$ jsou lineárně nezávislé.

Důsledek:

Matice řádku n může mít nejvýše n různých vlastních čísel, protože v T^n lze nalézt je n lineárně nezávislých vektorů

Je-li tomu vlastnímu číslu může příslušet více lineárně nezávislých vektorů, např. matice I_n má vl. číslo $\lambda = 1$ s geom. násobností n a vl. vektory $e_1, \dots, e_n$

$\uparrow$ vl. vektor $v = (1, \dots, 1)^T \rightarrow$ pak A má stejné řádkové součty $\perp$

1. definice char. polynomu
2. vztah k det. číslům
3. vyjádřit některé jeho koeficienty

(87.) Přehledové sešity, co víte o charakteristickém polynomu

Definice char. polynomu

Charakteristický polynom matice $A \in T^{n \times n}$ je

$$p_A(x) = \det(A - xI_n)$$

a má vždy stupeň n

Souvislost s vl. čísly

Číslo $\lambda \in T$ je vlastním číslem matice $A \in T^{n \times n} \Leftrightarrow$

je kořenem jejího charakteristického polynomu $p_A(x)$

algebraická násobnost

$\hookrightarrow$ násobnost kořene vl. čísla λ v char. polynomu $p_A(x)$

geometrická násobnost

$\hookrightarrow$ dimenze podprostoru vlastních vektorů vlastního čísla

čísleček

Pokud je T algebraicky uzavřené těleso, tak lze zapsat

$$p_A(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdot (x - \lambda_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{r_k}, \text{ kde } r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$$

příklady

nulová matice O_n má vl. číslo 0 s geom. násobností n

I_n má $(-x)^{n-1} \cdot (n-x)$ char. polynom

matice se dá zkonstruovat z char. polynomu

$$p_A(x) = (x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0) \cdot (-1)^n \text{ jeho}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix} \in T^{n \times n}$$

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

podmínka, aby

byla singulární;

aby měl vektor v

nulový

$$(A - \lambda I_n)v = 0$$

$\swarrow$ tedy

$\nwarrow$ počátek

dané

kořeny
vl. čísla

$\rightarrow$

Koeficienty charakteristického polynomu

$$p_A(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

$b_n = (-1)^n$ - pouze součin podle diagonály, kde je $-x$

$b_0 = \det(A)$ - dosadíme 0

$b_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n a_{ii}$ - vyber $n-1$ krát $-x$ na diagonále a jednu a_{ii}
z součinu $(a_{11}-x)(a_{22}-x) \dots (a_{nn}-x)$
↳ jen ze součinu na diagonále

Věta: (Gerschgorinovy kruhy)

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pro každé 'vlastní' číslo λ platí, že
existuje $i \in \{1, \dots, n\}$: $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$
↑ index řádku

a každé λ může ležet sjednocení těchto kruhů - na aproximování.

Singulární matice má alespoň jedno vlastní číslo 0, tedy $x \leftarrow b_0 = 0$
dělí charakteristický polynom, ale může mít další nenulová vlastní čísla.

Cayleyova-Hamiltonova věta

Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a její $p_A(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ platí
 $p_A(A) = (-1)^n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 = O_{n,n}$

1. formálně
definovat
● podobnost

2. vlastnosti
podobných
matic

3. podmínky na

diagonalizovatelnost

(88.) Přehledově septe, co víte o podobných maticích a diagonalizaci

Matice tohož zobrazení vůči jiným bázím mají stejná vlastní

čísla.
definice podobnosti

Matice $A, B \in T^{n \times n}$ jsou si podobné pokud existuje

regulární matice R taková, že $A = R^{-1}BR$

Pozorování

č.1 Pokud $\lambda \in T$ je vl. číslo A příslušné vektoru v , pak

λ je také vl. číslo B příslušné Rv

č.2 a zároveň má λ v A i v B shodnou geometrickou násobnost

č.3. pokud $B = R^{-1}AR$, pak $p_A(x) = p_B(x)$

č.4 $\hookrightarrow$ pokud λ je vl. číslo A a B je podobné A , pak i v B má stejnou algebraickou násobnost

? Pozorování Pokud báze B obsahuje vlastní vektor v zobrazení f , pak souřadnice v je vynásobena λ když se provede f , tedy matice zobrazení $[f]_{B,B}$ má λ na diagonále a jinde nuly

věta

Pro každé vlastní číslo λ matice A platí, že jeho geometrická násobnost je menší rovna algebraické násobnosti.

vlastně jen měním báze

Pozorování

Matice $A \in T^{n \times n}$ je podobná diagonální matici $\Leftrightarrow$

prostor T^n má bázi sestávající z vlastních vektorů A .

Matice podobná diagonální matici je diagonalizovatelná

Nebo-li $\exists R$ regulární,
 $\rightarrow A = R^{-1}DR$

Definice

Důsledek: Pro Hermitovu matici řádu n platí, že pokud $\Rightarrow$
má n různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.

Důsledek: Když lze char. polynom napsat jako $p_A(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{r_i}$,

pak A je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow \forall i: \dim(\ker(A - \lambda_i I)) = r_i$

$\hookrightarrow$ geometrická rovná algebraické násobnosti $\xrightarrow{A} (A - \lambda_i I)v = 0$

Důsledek: Pokud $A = R^{-1}DR$, pak $A^k = R^{-1}D^kR$ pro každé k

Identitová matice je podobná jím sama sobě $R^{-1}IR = R^{-1}R = I$

Matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ jsou si podobné, u trojúhelníkové
jsou vlastní čísla na diagonále. $\rightarrow$ dosadíme do diagonálu.

Matice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ nejsou si podobné, protože první matice má
vlastní číslo 2, ale geom. násobnost 1, u druhé má vl. číslo 2 s geom. nás. 2

singulární může být podobná - nulové i nenulové matici

- jen singulární

- diagonální i nedиагонаální.

$\rightarrow$ souvisí se
singulární i regulární

- podobné matice mají vždy stejnou hodnotu
 $\hookrightarrow p_A(x) = p_B(x)$

- algebraická i geometrická násobnost vlastních čísel podobných
matic je stejná $\xrightarrow{A} \dim(\ker(A - \lambda I))$

součinem $P^{-1}DP$, kde D je diagonální a P permutační,
tak dostaneme diagonální D' s přeházenými prvky na diagonále

1. definován

89. Přechodové systémy, co vše o speciálních komplexních maticích $z = a + bi$ $\bar{z} = a - bi$

2. základní vlastnosti

3. souvislost se skalárním součinem

4. použití při diagonalizaci

Definice: Hermitovská transpozice matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je

definována jako $(A^H)_{ij} = \overline{a_{ji}}$, kde $A^H \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Definice: Hermitovská matice je taková, pro kterou platí

$$A^H = A$$

Definice: Unitární je taková, pro kterou platí $A^{-1} = A^H$

v $\mathbb{R}$: - transpozice A^T
- symetrická $A^T = A$
- ortogonální $A^{-1} = A^T$

Pozorování: Hermitovské matice mají reálnou diagonálu, protože $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ platí jen pro reálnou složku

Pozorování: $(A^H)^H = A$ a $(AB)^H = B^H A^H$

Pozorování: Pokud A je unitární pak A^H je také unitární

$$A^H = (A^H)^{-1} \text{ a } A^{-1} = A^H$$

Pozorování: Součin unitárních matic je unitární $(AB)^H = (AB)^{-1}$,

$$\text{kde } A^H = A^{-1} \text{ a } B^H = B^{-1}$$

Pozorování: Unitární matice A splňuje $A^H A = I$

Fakt: $v \in \mathbb{C}^n$, pro který platí $v^H v = 1$ lze doplnit na unitární matici

$v_i^H v_j = 0$, tedy ortonormální
pro $i \neq j$

uzavřený na skalární násobek $(\lambda A)^H = \bar{\lambda} A^H = \bar{\lambda} A$

sloupce R

tvorí ortonormální bázi

všechny hermitovské matice jsou diagonalizovatelné a proto platí, že λ_i čísla mají stejnou alg. a geom. nás.

Věta: Každá hermitovská matice A má všechna vlastní

čísla reálná a navíc existuje unitární matice R

taková, že $D = R^{-1} A R$, kde D je diagonální

$$D = R^H A R$$

-symetrická matice je speciální případ hermitovské, takže lze diagonalizovat a vl. čísla mají stejnou alg. i geom. násobnost

Věta Každá symetrická matice A má všechna vlastní čísla reálná a existuje ortogonální R , že $R^{-1}AR$ je diagonální

$\Leftrightarrow R^T A R$

Γ Každá permutační matice je ortogonální i unitární, protože $A^T A = E$

• Hermitovské matice stejného řádu jsou uzavřeny na

sečty $(A+B)^H = A^H + B^H = A+B$, inverze $(A^{-1})^H = (A^H)^{-1} = A^{-1}$

reálné násobky, sečiny - ne, transpozice ano, transpozice

• Unitární matice stejného řádu jsou uzavřeny na

sečiny, transpozice, inverze

• Vlastní čísla hermitovské matice jsou:

reálná, stejnou alg. i geom. nás. a nemusí být nutně nenulové nebo různá

$\swarrow$ $O_{n,n}$ je hermitovská

1. skal. součin i
normu automaticky
definovat

2. vlastnosti skal.
součinu

3. Cauchyova-
Schwarzova
nerovnost

$\langle u|v \rangle = \langle v|u \rangle \rightarrow$
nad $\mathbb{R}$

(90.) Překloďte sepište, co víte o skalárním součinu a
související normě.

Skalární součin na vektorovém prostoru V nad
tělesem $\mathbb{C}$ je zobrazení, co přiřadí dvojici
vektorů $u, v \in V$ skalár $\langle u|v \rangle \in \mathbb{C}$ a jsou splněny
následující axiomy:

1. nesápornost $\forall u \in V: \langle u|u \rangle \in \mathbb{R}_0^+$

2. pozitivní definitnost $\forall u \in V: \langle u|u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

3. hermitovské symetrie $\forall u, v \in V: \langle u|v \rangle = \overline{\langle v|u \rangle}$

4. linearita

$\forall u \in V: \forall \epsilon \in \mathbb{C}: \langle \epsilon \cdot u|v \rangle = \epsilon \cdot \langle u|v \rangle$

$\forall u, v, w \in V: \langle u+v|w \rangle = \langle u|w \rangle + \langle v|w \rangle$

ukázky

standardní skalární součin nad $\mathbb{R}^n$

$$\langle u|v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = v^T u$$

standardní $i=1$ skalární součin nad $\mathbb{C}^n$

$$\langle u|v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i = v^H u$$

skalární součin $\xrightarrow{\text{na } \mathbb{R}^m}$ určený regulární matricí A

$$\langle u|v \rangle = v^T A^T A u$$

Vlastnosti skalárního součinu

pozorování: $\langle u|u \rangle = \overline{\langle u|u \rangle} \Rightarrow \langle u|u \rangle \in \mathbb{R}$

skalární součin vektoru se sebou samým je Reálné číslo a nezáporné

pozorování: linearita sčítání ve druhé složce $\langle u|v+w \rangle = \langle u|v \rangle + \langle u|w \rangle$

pozorování: antilinearita skalárního násobku druhé složky $\langle u|tv \rangle = \bar{t} \langle u|v \rangle$

důsledek: linearita pro lineární kombinace

$$\left\langle \sum_{i=1}^k a_i u_i \middle| \sum_{j=1}^l b_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_i \bar{b}_j \langle u_i | v_j \rangle$$

důsledek: i komplexní násobek vektoru se sebou samým je reálný a nezáporný $\langle tu|tu \rangle = t\bar{t} \langle u|u \rangle = |t|^2 \langle u|u \rangle$

Definice normy

Nechť V je prostor se skalárním součinem ($\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$),

pak norma je zobrazení $V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definovaná $\|u\| = \sqrt{\langle u|u \rangle}$

pozorování: pro normu platí $\|t \cdot u\| = |t| \cdot \|u\|$

tedy nezáporná

pozorování: Standardní skalární součin nad $\mathbb{R}^n$ a související norma

z předchozího důsledku

splňuje $\langle u|v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \varphi$, kde φ je úhel mezi vektory u a v

Věta (Cauchyho-Schwarzova nerovnost):

Skalární součin dvou vektorů u a v v vektorovém prostoru nad $\mathbb{C}$

splňuje $|\langle u|v \rangle| \leq \sqrt{\langle u|u \rangle \langle v|v \rangle}$ nebo-li $|\langle u|v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Věta (nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem)

Pro libovolný $u \in \mathbb{R}^n$: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2}$

Tvrzení (trojúhelníková nerovnost) $\rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$\{u \in \mathbb{R}^3 : \langle u|(1,2,3)^T \rangle = 1\}$ je rovina o třech nezávislých $u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 1$, tedy rovina a dimenze = 2

Kdyby $v^T u$ nahrazeno za $v^T u \rightarrow$ porušen axiom o nezápornosti a pozitivní definitnosti

1. Formálně definovat ortogonalitu i

• kolmost projekci

2. uvést vlastnosti množin navzájem kolmých vektorů

3. vlastnosti projekce

4. užít projekce při řešení soustav

(91.) Přehledově sepište, co víte o ortogonalitě a kolmé projekci

Vektory u, v z vektorového prostoru V jsou kolmé $\Leftrightarrow$
se skalárním součinem

$$\langle u | v \rangle = 0, \text{ značí se } u \perp v$$

ukážka

nenulové vektory $u \in \mathbb{R}^n$ jsou kolmé, svírají $\frac{\pi}{2}$ úhel, když

$$0 = \langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos \varphi = 0$$

řešení homogenní soustavy $Ax=0$ je kolmé na všechny vektory z R_A matice A

Pozorování: množina vzájemně kolmých ^{ne nulových} vektorů je lineárně nezávislá

Definice ortogonální projekce

Nechť U je prostor se skalárním součinem a V je jeho podprostor s ortonormální bází $B = (b_1, \dots, b_m)$

Pak zobrazení $p_B: U \rightarrow V$ definované $p_B(u) = \sum_{i=1}^m \langle u | b_i \rangle b_i$ je ortogonální projekce U na V .

Pozorování: Ortogonální projekce je lineární zobrazení

Lemma: Nechť p_B je ortogonální projekce U na V , potom

$$u - p_B(u) \perp b_i \text{ pro každé } b_i \in B$$

Tvrzení: Vektor $p_B(u)$ je ten z $V = \text{span}(B)$, který je nejbližší k u tím, že minimalizuje $\|u - p_B(u)\|$

Důsledek: Zobrazení p_B nezávisí na volbě báze B

kolmost
odchylky $\rightarrow$

nejlepší
aproximace $\rightarrow$

Metoda nejmenší chyb - užití při řešení soustav

- pokud nemá $Ax=b$ přesné řešení! $b \in S_A$, tak lze promítnout b do S_A a získat b'

$Ax=b'$ má už řešení nebo-li minimalizuje chybu $\|b-b'\| = \|b-Ax\|$

vyřešit ekvivalentní $A^T A x = A^T b$

1. nadefinujt a
2. med'te užití v
● souřadných
systémech
3. popište, jak
získat

92. Přehledově sepište, co víte o ortonormálních bázích

Definice ortonormální báze

Báze $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ prostoru V ^{se skalárním součinem} nazývá ortonormální pokud platí:

$$b_i \perp b_j \text{ pro } j \neq i \text{ a } b_j, b_i \in B$$

$$\|b_i\| = 1 \text{ pro libovolné } b_i \in B$$

Matice ortonormální báze A tvořena sloupci je vřci standardním skalárním součinem unitární $A^H A = I_n$

Užití v souřadných systémech

Trzení

Souřadnicový vektor lze určit Fourierovými koeficienty.

Necht $B = (b_1, \dots, b_m)$ je ortonormální báze prostoru V .

Pro každé $v \in V$ platí $v = \langle v | b_1 \rangle b_1 + \dots + \langle v | b_m \rangle b_m$

$$[v]_B = (\langle v | b_1 \rangle; \langle v | b_2 \rangle; \dots; \langle v | b_m \rangle)^T$$

Věta

Necht B je ortonormální báze prostoru V se skalárním součinem. Pro každé $u, v \in V$: $\langle u | v \rangle = [v]_B^H [u]_B$

Definice

Lineární zobrazení $f: V \rightarrow W$ je bijektivní izometrie (zachování skalárního součinu i normy) $\Leftrightarrow$ matice přechodu $[f]_{B_2, B_1}$ mezi

$\forall u, v \in V: \langle u | v \rangle = \langle f(u) | f(v) \rangle$ dvěma ortonormálními bázemi ^{B_1 a B_2} je unitární matice

Jak získat ortonormální bázi → Gram-Schmidtova ortonormalizace

for $i=1, \dots, n$ do

$$c_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle b_i | d_j \rangle d_j \quad \leftarrow \text{odečtením jejich ortogonálních projekce}$$

zajištění kolmosti

$$d_i = \frac{1}{\|c_i\|} \cdot c_i$$

← normalizace

Důsledek: Pro každou komplexní regulární matici A existuje dolní ?

trojúhelníková matice L a unitární matice Q taková, že $A = LQ$

Věta: Každá komplexní regulární A má tzv. QR rozklad $A = Q'R$

s unitární Q' a horní trojúhelníkovou R .

Pro ortonormalizaci může být i více vektorů skalárním násobkem

z původní báze B , např. pokud $b_1 \perp b_2$ v původní bázi

ortogonální projekce dvou kolmých vektorů může promítat do jedné přímky, kde kolmé nejsou

stabilita Gram-Schmidtovy ortonormalizace je $O(n^4)$ a více při skalárním

ortogonální báze → vektory kolmé, ale nemají jednotkovou délku

skalárním
součinu
 $v^H A u = \langle u, v \rangle$

1. nadefinuj

93. Přehledově sepište, co víte o lineárních zobrazeních
zachovávajících skalární součin

2. věty o
charakterizaci

Definice: Lineární zobrazení f mezi prostory V a W je
izometrie $\forall u, v \in V: \langle u | v \rangle = \langle f(u) | f(v) \rangle$
(zachovává váru - li skalární součin)

Věty o charakterizaci

Věta 1 (norma)

Lineární zobrazení $f: V \rightarrow W$ je izometrie $\Leftrightarrow$

zachovává normu $\forall u \in V: \|u\| = \|f(u)\|$

Věta 2 (charakterizace bijektivní izometrie)

Nechť V a W jsou vektorové prostory se skalárním součinem
a B a C jsou jejich ortonormální báze, pak $f: V \rightarrow W$ je
bijektivní izometrie $\Leftrightarrow [f]_{B,C}$ je unitární

● Součin 2 $\rightarrow$

unitárních matic

je unitární matice

f izometrie, pak

f^{-1} taky izometrie

- složení dvou izometrií vznikne opět izometrie

┐

unitární matice jsou uzavřené na transpozici

ortonormální bázi tvoří sloupce libovolné matice: jednotkové,
permutační, unitární

pro libovolnou bázi lze určit skalární součin, aby věci němu
byla báze ortonormální

1. nadefinovat

2. souvislost s
• řešením soustav

3. věta o jeho
dimenzi

(94.) Přehledově sepište, co víte o ortogonálním doplňku

Definice ortogonálního doplňku

Nechť U je vektorový prostor se skalárním součinem a V je jeho podmnožina. Pak ortogonální doplněk $V^\perp = \{u \in U \mid \forall v \in V: u \perp v\}$

Pozorování

Pokud $W \subseteq V$, pak $W^\perp \supseteq V^\perp$

Pozorování

Každý ortogonální doplněk je podprostorem U

Pozorování

Pro každý prostor $V \subseteq U$ platí $V \cap V^\perp = \{0\}$

Věta

Pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a libovolné $u \in R_A$ a $v \in \ker(A)$ splňuje

$u \perp v$, proto $\ker(A) = (R_A)^\perp$

vzhledem ke
standardnímu skalárnímu součinu

Věta o dimenzi

Pro prostor U se skalárním součinem a konečnou dimenzí a

jeho podprostor V platí $(V^\perp)^\perp = V$ a

$$\dim V + \dim V^\perp = \dim U$$

$\Gamma V \subseteq (V^\perp)^\perp$, protože V může mít jen 2 vektory, ale doplňky jsou
vždy navíc i lineární kombinace, a podprostorem $V = (V^\perp)^\perp$

Pokud $A^T B = 0$, pak $S_A \subseteq (S_B)^\perp$

0 je kolmý
na všechny
vektory

souvislost s
řešením
soustav

1. nedefinovat

2. základní
vlastnosti

3. algoritmus
Choleského
rozkladu

(95.) Přehledově sepište, co víte o pozitivně definitních maticích

Definice pozitivně definitní

Hermitská matice A řádu n je pozitivně

definitní pokud pro ni platí: $\forall v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : v^H A v > 0$

Příklad (Gramova matice - vždy pozitivně definitní)

Mezist. V je vektorový prostor se skalárním součinem a
bází $B = (b_1, \dots, b_n)$. Potom tzv. Gramova matice A

definovaná $a_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$ splňuje $\forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = [u]_B^H A [v]_B$

"Když B je ortonormální, pak $A = I_n$ "

Základní vlastnosti

uzavřenost na sčítání A, B pozitivně definitní, tak pak
i $A+B$ je pozitivně definitní

transformace regulární maticí Pokud A je PD a R je

regulární, pak $R^H A R$ je pozitivně definitní

$\Rightarrow$ buď A i $R^H A R$ PD nebo ani jedna

existence inverze Každá PD A je nutně regulární, pak
i A^{-1} je PD.

bloková struktura

Hermitská bloková matice je PD $\iff A \text{ i } B$
je pozitivně definitní

$$\begin{pmatrix} A & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B \end{pmatrix}$$

1. nadefinováno

(96.) Přehledově sepište, co víte o charakterizaci pozitivně definitních matic.

2. charakterizace pomocí vlastních čísel

3. char. pomocí determinantů

Hermitské matice A řádu n se nazývá pozitivně definitní právě když pro všechna $v \in \mathbb{C}^n: v^H A v > 0$

Charakterizace (vl. čísla)

Následující jsou ekvivalentní: (pro hermitskou A)

1. Matice A je pozitivně definitní

2. A má všechna vlastní čísla kladná

3. existuje regulární matice U taková, že $A = U^H U$

hermitská A má vl. čísla reálná

další charakterizace: Charakterizace (pomocí determinantů) – Sylvesterova podmínka
Choleského rozklad

Věta:

Hermitské matice A řádu n je pozitivně definitní právě když $A_1, \dots, A_n$ mají kladné determinanty, kde A_i sestává z prvních i řádků a i sloupců A

Rekurentní podmínka

Věta Bloková matice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$ je pozitivně

definitní právě když $a_{11} \in \mathbb{R}^+$ a $B - \frac{1}{a_{11}} 0 0^H$ je pozitivně definitní

Důsledek: PD lze rozpoznat Gaussovou eliminací, ale nelze měnit řádky, jen eliminovat řádky pod pivotem. Pak pokud je diagonála kladná, tak matice je PD

T Pokud A je hermitovská, tak $BA B^H$ je hermitovská vždy

Pokud připustíme reálnou diagonálu V , pak $U^H U = A$ může
mít 2^n řád matice A rozkladů, zvlášť + nebo - u prvků
na diagonále

u Choleského
je ukladná,
pak jechozminé

PD matice jsou uzavřeny na součty, transpozice a inverze

Hermitovská matice nemůže být obdeluhovce matice

1. axiomatizy
nedefinovat

2. nedefinovat
matice

3. popsat při
změně báze

4. 2 tvzení o
jejich diagonalizaci

- Obecně

- Sylvesterův
zákon

(97.) Přehledově sepište, co víte o bilineárních a kvadratických formách a jejich maticích

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť

zobrazení $f: V \times V \rightarrow T$ splňuje:

homogenita v obou složkách

$$\bullet \forall u, v \in V : \forall t \in T : f(tu, v) = f(u, tv) = t f(u, v)$$

aditivita v první složce

$$\bullet \forall u, v, w \in V : f(u+v, w) = f(u, w) + f(v, w)$$

aditivita v druhé složce

$$\bullet \forall u, v, w \in V : f(u, v+w) = f(u, v) + f(u, w)$$

pak f je bilineární forma

Bilineární forma je symetrická pokud $\forall u, v \in V : f(u, v) = f(v, u)$

Zobrazení $g: V \rightarrow T$ se nazývá kvadratická forma pokud
existuje nějaká bilineární forma, že platí

$$\forall v \in V : g(v) = f(v, v)$$

Příklady: Skalární součin nad $\mathbb{R}$

Matice bilineární formy

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T ,
báze $B = (b_1, \dots, b_n)$ Pak matice bilineární formy f

vzhledem k bázi B je matice A o složkách

$$a_{ij} = f(b_i, b_j)$$

Matice kvadratické formy g je matice symetrické bilineární
formy odpovídající g

ne nad $\mathbb{C} \rightarrow$

pomocí matice formy ke hodnotě formy spočítat

pozorování: $f(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$ $g(v) = [v]_B^T A [v]_B$

připomenutí: $a_{ij} = f(b_i, b_j) = \frac{1}{2}(g(b_i + b_j) - g(b_i) - g(b_j))$ —

změna báze formy

Nechť A je matice bilineární / kvadratické formy vzhledem

k bázi B . Pak $[id]_{C,B}^T A [id]_{C,B}$ je matice stejné formy vzhledem k bázi C .

analytické vyjádření (definice) bilineární formy f nad T^n a matice A je

homogenní polynom f druhého stupně ve $2n$ proměnných daný

vzrušen $f((u_1, \dots, u_n)^T, (v_1, \dots, v_n)^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i v_j$

Pokud $\text{char}(T) \neq 2 \rightarrow$ tak některé kvadratické formy nelze odcházet — např. v_1, v_2

Pro analytické $g(v) = v^T A v = \sum_{i=1}^n a_{ii} v_i^2$ pokud A symetrické a také pokud $\text{char}(T) \neq 2$

Obecně

Věta: Každá kvadratická forma na vektorovém prostoru konečné dimenze nad tělesem T , kde $\text{char}(T) \neq 2$ má polární bázi. Kele v této polární bázi má kvadratická forma diagonální matici.

Věta: Pro jakoukoliv symetrickou $A \in T^{n \times n}$ s $\text{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice R , že $R^T A R$ je diagonální.

prakticky: — diagonalizovat pomocí vlastních čísel reálné symetrické matice
— gaussovou eliminací — každou řádkovou operaci provést současně na řádky i

— vektorů polární báze B jsou sloupce $R = [id]_{B,E}$ či řádky R^T

připomenutí je-li A symetrická, je i $A' = E^T A E$ symetrická

úvědomění: dolní trojúhelníková $R^T A R$ je i diagonální

Sylvesterův zákon setrvačnosti

každá kvadratická forma na konečně generovaném reálném prostoru má vzhledem k správné bázi diagonální matici pouze s $1, -1$ a 0 na diagonále a všechny takové diagonální matice odpovídající stejné kvadratické formě mají stejný počet 1 a -1

připomenutí: formy s reálnými pozitivně definitivními maticemi jsou ty, co jdou diagonalizovat na I . Choleskyův rozklad $A = U^H U = U^T U$

připomenutí: pro komplexní symetrické (nemíto co hermitovské) tak dělá diagonální matici s 1 a 0 na diagonále (včetně setrvačnosti / jednoznačnosti)

hlavní vztah změny báze $B = [id]_{B,C}^T C [id]_{B,C}$

na diagonále matice kvadratické formy nemusí být vlastní čísla

na diagonální matici kvadratické formy může být prvek, který není druhou mocninou nějakého čísla, tedy jen $0, 1, 2, 3$ nemůže 4 a 5