

Pojmy a tvrzení požadovaná u zkoušky z MA1 (LS 2025/26)

- Pojmy.** U následujících pojmů byste měli umět zformulovat definici a na jednoduchém příkladu ukázat, že té definici rozumíte:

Základní číselné obory ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, neformální definice $\mathbb{R}$ pomocí číselných rozvoje). Porovnávání mohutnosti množin, spočetná množina. Pojmy definované pro podmnožiny $\mathbb{R}$: horní/dolní mez, (shora/zdola) omezená množina, supremum, infimum, maximum, minimum. Metrika a metrický prostor, trojúhelníková nerovnost. Posloupnosti reálných čísel, jejich omezenost, monotonie, limita posloupnosti, vlastní a nevlastní limita, konvergentní posloupnost. Rozšířená reálná čísla $\mathbb{R}^*$ a operace s nimi. Okolí bodu, včetně okolí nevlastních bodů $\pm\infty$, prstencové okolí, jednostranné prstencové okolí. Podposloupnost, hromadný bod, limes superior a limes inferior. Číselné řady a jejich konvergence, posloupnost částečných součtů. Funkce: jejich definiční obor a obor hodnot, prostá funkce, (shora/zdola) omezená funkce, monotonie funkcí, inverzní funkce. Exponenciální funkce, přirozený logaritmus, funkce $\sin$ a $\cos$, obecná mocnina x^y . Limita funkce, jednostranná limita, vlastní a nevlastní limita. Spojitost a jednostranná spojitost funkce. Interval, netriviální interval, vnitřní a krajní bod. Spojitost funkce na intervalu. Extrémy funkcí: lokální a globální, ostré a neostré. Kompaktní interval. Derivace funkce (vlastní, nevlastní, jednostranná), diferencovatelná funkce. Derivace vyšších řádů. Konvexita/konkávnost funkce, ryzí konvexita/konkávnost. Taylorův polynom a Taylorova řada. Značení $f(x) = o(g(x))$ a $f(x) = O(g(x))$ pro $x \rightarrow A$. Otevřený interval, primitivní funkce. Newtonův integrál, Riemannův integrál, dělení intervalu, horní a dolní Riemannovy sumy, horní a dolní Riemannův integrál. Zjemnění dělení. Výpočet objemu a povrchu rotačních těles, výpočet plošného obsahu rovinných oblastí omezených grafy dvou funkcí, křivka a její délka.

→ limita a další jsou taky definovaný geomet.

- Tvrzení.** U následujících tvrzení se očekává, že je budete umět zformulovat. U tvrzení označených hvězdičkou se očekává, že je budete umět i dokázat.

- 1 • Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná
- 2 • *Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná
- 3 • Cantorova-Bernsteinova věta o mohutnostech množin
- 4 • Vlastnost suprema pro $\mathbb{R}$ -
- 5 • *Jednoznačnost limity posloupnosti
- 6 • *Existence limity monotónní posloupnosti -
- 7 • Aritmetika limit
- 8 • *Věta o limitě a uspořádání -
- 9 • Věta o dvou policajtech pro posloupnosti
- 10 • *Ekvivalence dvou definic hromadného bodu (jako limity podposloupnosti a jako bodu, jehož všechna okolí obsahují nekonečně mnoho prvků posloupnosti)
- 11 • *Existence monotónní podposloupnosti
- 12 • *Bolzanova-Weierstrassova věta
- 13 • Posloupnost má limitu, právě když má jediný hromadný bod
- 14 • Existence $\limsup$ a $\liminf$
- 15 • *Nutná podmínka pro konvergenci řady
- 16 • *Konvergence geometrické řady v závislosti na hodnotě kvocientu
- 17 • Vlastnosti exponenciální funkce
- 18 • *Jednoznačnost limity funkce
- 19 • *Heineho věta o ekvivalentní definici limity funkce -
- 20 • Aritmetika limit funkcí
- 21 • Souvislost limity funkce a uspořádání -
- 22 • Existence jednostranných limit monotónní funkce •

- 13 • Věta o dvou políciátech pro funkce
- 24 • Věta o limitě složené funkce -
- 25 • *Bolzanova věta o nulovém bodu spojitě funkce
- 26 • *Nabývání obecných mezíhodnot pro spojitě funkce = Darbouxova vlastnost -
- 27 • Spojitá funkce zobrazí interval na interval
- 28 • Nabývání extrémů ("princip maxima") pro spojitě funkce
- 29 • Uzavřenost spojitých funkcí na součet, součin, podíl, složení funkcí -
- 30 • Prostá spojitá funkce na intervalu je ryze monotónní a její inverzní funkce je také spojitá -
- 31 • *Spojitost diferencovatelné funkce -
- 32 • Aritmetika (vlastních) derivací
- 33 • Vzorečky pro derivace základních funkcí: $\sin$, $\cos$, $\ln$, $\exp$, x^α
- 34 • Věta o derivaci složené funkce
- 35 • Věta o derivaci inverzní funkce -
- 36 • L'Hospitalovo pravidlo
- 37 • *Jednostranná derivace jako limita oboustranné derivace -
- 38 • *Souvislost mezi jednostrannými a oboustrannými derivacemi a lokálními extrémy ~
- 39 • *Rolleova věta
- 40 • *Lagrangeova věta o střední hodnotě -
- 41 • *Souvislost znaménka derivace a monotonie na intervalu -
- 42 • *Souvislost mezi konvexitou, monotonií první derivace a znaménkem druhé derivace
- 43 • Charakterizace Taylorova polynomu pomocí vztahu $f(x) - T(x) = o((x - A)^n)$
- 44 • *(Ne)jednoznačnost primitivní funkce na intervalu
- 45 • *Spojitost primitivní funkce
- 46 • *Funkce, jejíž jednostranná limita se liší od funkční hodnoty, nemá primitivní funkci -
- 47 • *Výpočet primitivní funkce pomocí metody per partes
- 48 • *Výpočet primitivní funkce pomocí substituce -
- 49 • Metoda per partes pro Newtonův integrál
- 50 • Substituční metoda pro Newtonův integrál -
- 51 • *Odhady částečných součtů řad pomocí integrálu -
- 52 • *Integrační kritérium konvergence řad -
- 53 • *Konvergence řad tvaru $\sum_{n \geq 1} n^\alpha$ v závislosti na α -
- 54 • *Souvislost mezi zjemněním intervalu a hodnotami Riemannových sum
- 55 • *Nerovnost mezi horním a dolním Riemannovým integrálem
- 56 • *Neexistence Riemannova integrálu pro neomezené funkce -
- 57 • *Kritérium riemannovské integrovatelnosti -
- 58 • *Riemannovská integrovatelnost monotónních funkcí -
- 59 • Riemannovská integrovatelnost spojitých funkcí
- 60 • První "základní věta analýzy" -
- 61 • *Druhá "základní věta analýzy" -

Kromě výše uvedených tvrzení a pojmů se u zkoušky můžete setkat i s počítacími nebo teoretickými příklady.

VZORCE

tabulkové limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

- aritmetické limity

- L'Hospitalovo pravidlo $\frac{0}{0}$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

podmínky: - diferencovatelnost a nenulová derivace jmenovatele

- neurčitost $\frac{0}{0}$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

- násobit 1 nebo přičíst 0

Derivace

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

tabulkové derivace

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\checkmark \quad a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}$$

Δ pravidlo
není

Useful integrals

$$\int_A^B f(x) dx = [F(x)]_A^B = F(B^-) - F(A^+) = \lim_{x \rightarrow B^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow A^+} F(x)$$

per partes $\int_A^B Fg + \int_A^B Gf = [FG]_A^B$

substitution $\int_A^B f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$

primitive functions

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{pro } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

⌋

Stirling limit

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^a \gg \ln(n) \gg a$$

1) Základní číselné obory ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, neformální
definice $\mathbb{R}$ pomocí číselných rozvoji).

přirozená

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

celá

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

racionální

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{k}{n} ; k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je tvořena všemi
desetinými rozvoji

$$\pm m, d_1 d_2 d_3 \dots$$

kde $\bullet m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\bullet d_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pro $i \in \mathbb{N}$

$\bullet \pm$ je $+$ nebo $-$

je jedno reálné číslo může mít více desetiných rozvoji,

např. $+0,00\dots = -0,00\dots$ nebo $5,00 = 4,99\dots$

2) Porovnávání mohutnosti množin

Množiny A a B mají stejnou mohutnost $|A| = |B|$,

právě když existuje bijekce z A do B

$$|A| \leq |B| \Leftrightarrow \text{existuje prostá funkce z } A \text{ do } B$$

Cantorova-Bernsteina $(|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Leftrightarrow |A| = |B|)$

3) Spočetná množina

Množina A je spočetná $\Leftrightarrow |A| \leq |\mathbb{N}|$, nebo-li
existuje prosté zobrazení do přirozených čísel

např. $\mathbb{Z}$

$0, -1, 1, -2, 2, \dots$

atd.

každá konečná
množina je
spočetná

4) Pojmy definované pro podmnožiny $\mathbb{R}$

horní mez

množiny A je libovolné $x \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall y \in A: y \leq x$

x nemusí
být z A !

dolní mez

množiny A je libovolné $x \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall y \in A: x \leq y$

$\mathbb{R}$ tedy každé
 $z \in \mathbb{R}$ větší než x
je tedy horní mez
 A

$\mathbb{R}$ obdobně pro
dolní mez

shora omezená množina $\Leftrightarrow$ má nějakou horní mez

zdola omezená množina $\Leftrightarrow$ má nějakou dolní mez

omezená množina $\Leftrightarrow$ je omezená shora i zdola

maximum

množiny A je $x \in A$ a x je horní mez A $\max A = x$

minimum

množiny A je $y \in A$ a y je dolní mez A $\min A = y$

supremum

množiny A je $s \in \mathbb{R}$, pro které platí, že je nejmenší horní mez A

$$\sup A = s$$

$\rightarrow$ pokud má A
maximum, tak je i
supremum

infimum

množiny A je $t \in \mathbb{R}$, pro které platí, že je největší dolní mez A

$$\inf A = t$$

$\rightarrow$ pokud má A
minimum, tak je
i infimum

5) Metrika a metrický prostor

Metrický prostor (M, d) , kde M je libovolná množina a d je funkce $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, tak splňuje

nezápornost $\rightarrow$

$$\textcircled{\text{I}} \quad \forall x, y \in M: d(x, y) \geq 0 \quad (\text{a } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad \forall x, y \in M: d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{symetrie})$$

$$\textcircled{\text{III}} \quad \forall x, y, z \in M: d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (\text{trojúhelníková nerovnost})$$

pro množinu $\mathbb{R}$ pak platí $d(x, y) = |x - y|$ pro $x, y \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ první dvě splňují logicky a třetí také, ale potřebu dokázat, nebo-li $|a + b| \leq |a| + |b|$ pro $a, b \in \mathbb{R}$

b) Postupnosti reálných čísel - omezenost a monotonie

Postupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo-li $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ je řetězcem $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$

shora omezená: Pokud existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq M$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

zdele omezená: Pokud existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq M$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

omezená: Pokud je (a_n) omezená shora i zdele

rostoucí: Pokud $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

neklešající: Pokud $a_n \leq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

klešající: Pokud $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

neklešající: Pokud $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

monotónní

Pokud je neklešající nebo nerostoucí



(slabě rostoucí)

(slabě klešající)

7) Limity posloupností - vlastní i nevlastní

Vlastní limita $\rightarrow$ konverguje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ nebo $(a_n) \rightarrow A$
kde $A \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ nelze v okolí
 $a_n \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$

Nevlastní limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0: a_n > K$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0: a_n < K$$

$\mathbb{R}$
každá posloupnost,
co má limitu $+\infty$
je shora neomezená
opačně neplatí:
 $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots$

8) Konvergentní posloupnost

pokud má posloupnost vlastní limitu, tak konverguje
k $A \in \mathbb{R}$, kde A je limita (a_n) $(a_n) \rightarrow A$

9) Rozšíření reálných čísel $\mathbb{R}^*$ a operace s nimi

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

$$\textcircled{I} \forall x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty$$

$$\textcircled{II} \forall x \in \mathbb{R}^*: x \neq -\infty: x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*: x \neq +\infty: x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$$

$$\textcircled{III} \forall x \in \mathbb{R}^*: x > 0: x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty \quad \text{a} \quad x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*: x < 0: x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty \quad \text{a} \quad x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$$

$$\textcircled{IV} \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\textcircled{V} \forall x, y \in \mathbb{R}^*: x - y = x + (-1) \cdot y$$

$$\textcircled{VI} \forall x, y \in \mathbb{R}^*: \frac{x}{y} = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$$

9)
- pohybovosti

nedefinované výrazy

$$(+\infty) + (-\infty)$$

$$(-\infty) + (+\infty)$$

$$(+\infty) - (+\infty)$$

$$(-\infty) - (-\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$(\pm\infty) \cdot 0$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\frac{x}{0} \text{ pro } x \in \mathbb{R}^*$$

- distekce

Podle rozšíření na $\mathbb{R}^*$ má každá podmnožina R i $\mathbb{R}^*$

horní mez $+\infty$ a dolní mez $-\infty$, tedy všechny množiny mají supremum i infimum

10) Okolí body - včetně okolí nevlastních, prostencové, jednustranné
prostencové

Pro $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in (0, +\infty)$ (nebo-li $\varepsilon > 0$) je

$$\text{okolí } U(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon; x + \varepsilon)$$

okolí nevlastních bodů $\pm\infty$

Pro $\varepsilon > 0$, tedy $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$U(+\infty; \varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right)$$

$$U(-\infty; \varepsilon) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Navíc platí: Pro $A \in \mathbb{R}^*$ a $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < +\infty$ platí $U(A, \varepsilon_1) \subseteq U(A, \varepsilon_2)$
Pro $A, B \in \mathbb{R}^*$: $A \neq B$: $\exists \varepsilon \in (0, +\infty)$: $U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon) = \emptyset$

okolí body x_0
poloměru $\varepsilon \rightarrow$

Prstenové okolí

Necht' $\varepsilon > 0$ a $A \in \mathbb{R}$

① Prstenové okolí bodu A je $P(A, \varepsilon) = (A - \varepsilon, A) \cup (A, A + \varepsilon) = U(A, \varepsilon) \setminus A$

② Levé prstenové okolí bodu A je $P^-(A, \varepsilon) = (A - \varepsilon, A)$

Pravé prstenové okolí bodu A je $P^+(A, \varepsilon) = (A, A + \varepsilon)$

↪ jednostranné
neholené
se nečleňují

11) Podpostoupnost, hromadný bod, limes superior a
limes inferior

Podpostoupnost (b_n) posloupnosti (a_n) je pokud
existuje rostoucí funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$\underline{b_n = a_{f(n)}}$$

↑ pokud má $(a_n) \rightarrow L$, tak i každá podpostoupnost (a_n) má tento
limitu. ▮

Hromadný bod

Necht' (a_n) je posloupnost reálných čísel. Pak rozšířené
reálné číslo $\ell \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem (a_n) pokud
je limitou nějaké podpostoupnosti (a_n) .

Množina všech hromadných bodů je $\mathcal{H}(a_n)$.

↪ příklad:

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$

je podpostoupností

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

protože funkce

$$f(n) = 2^n$$

↪ každá posloupnost
má nějaký hromadný
bod a
pokud má jediný
hromadný bod,
tak je i limitou
 (a_n)

$\text{Mkl}^*(a_n)$ je posloupnost a $\mathcal{I}(a_n)$ je její množina
hromadných bodů

Limes superior je největší prvek $\mathcal{I}(a_n)$ nebo-li

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \mathcal{I}(a_n)$$

Limes inferior je nejmenší prvek $\mathcal{I}(a_n)$ nebo-li

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \mathcal{I}(a_n)$$

12) Číselné řady a jejich konvergence a posloupnost
částečných součtů

Nehonejná řada reálných čísel je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nebo $a_1 + a_2 + \dots$

částečný součet S_n je součet prvních n členů

pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

(S_n) je posloupnost částečných součtů

Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{R}$ (tedy reálná), pak je řada

konvergentní

geometrická řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots, \text{ kde } q \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1 \\ +\infty & \text{pro } q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{pro } q \neq 1$$

ale uzavíráním
↓ konverguje
i k různým
součtům

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

nemá součet, protože

$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)$ neexistuje

$$(S_n) = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$$

než měnit
pořadí libovolně

12) Funkce - definiční obor, obor hodnot, prostá funkce,
(shora/zdola) omezená

Funkce $f: A \rightarrow B$ je binární relace, co každému

prvku $x \in A$ přiřadí právě jeden prvek $y \in B$

$$\forall x \in A: \exists! y \in B: f(x) = y$$

Množina A je definiční obor funkce f

Množina $\{f(x) \mid x \in A\}$ je obor hodnot funkce f $= \text{Im} f \subseteq B$

Funkce $f: A \rightarrow B$ je prostá právě když pro dvě různé

$$x_1, x_2 \in M: f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M: x_1 \neq x_2 \\ \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Nechť $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ a $M \subseteq A$ je podmnožina definičního oboru

f je:

① shora omezená na množině M pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in M: x < K$$

zdola omezená na množině M pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in M: x > K$$

omezená pokud je omezená shora i zdola

13) Funkce - monotonie funkcí

Nechť M je podmnožina $M \subseteq A$ definičního oboru
funkce $f: A \rightarrow B$

(I) rostoucí na množině M : $\forall x, y \in M: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

nehlesající na M : $\forall x, y \in M: x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

slabě rostoucí

klesající na M : $\forall x, y \in M: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

nerostoucí na M : $\forall x, y \in M: x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

slabě klesající

(II) monotónní na M pokud je nehlesající nebo nerostoucí na M

(III) periodická s periodou $p \in (0, +\infty)$, když pro každé $x \in A$ platí, že
i $x+p \in A$ a $f(x) = f(x+p)$

pokud explicitně
nezmíníme
množinu, myslíme
celý $\mathbb{R}$

Funkce $f(x) = x$ je neomezená shora i zdola, a postupnost
nelze.

┘

14) Inverzní funkce

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je prostá funkce, pak

inverzní funkce k funkci f je

$\nwarrow g = f^{-1}$

$g: \text{Im}(f) \rightarrow M$, pro které platí $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Funkce $f(x) = x^2$ je prostá na $[0, +\infty)$ a její inverzní funkce je

$\sqrt{x}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.

Funkce $f(x) = x^2$ je prostá na $(-\infty, 0]$ a její inverzní je $-\sqrt{x}: [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$.

15) Exponenciální funkce

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, tedy je všude definována
a lze odvodit, že $\exp(0) = 1$

- $\exp(x) \geq 1$ pro $x \geq 0$

- rostoucí na $[0, +\infty)$

- pak rozšíření: na $(-\infty; 0]$ plyne z této věty:

$$\text{Pro } \forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Vlastnosti exp. funkce:

(I) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(II) $\exp(x) \in (0, 1)$ pro $x < 0$

(III) $\exp(x)$ je rostoucí na $\mathbb{R}$

(IV) $\exp(x)$ je prostá na $\mathbb{R}$

obor hodnot
→
je $(0, +\infty)$

$$\exp(1) = 2,7182818\dots$$

↳ Eulerovo číslo

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

↳ další definice

16) Přírodní logaritmus

protože je exponenciální funkce proslá, tak má inverzní funkci, tedy přírodní logaritmus

Def. obor $\ln$ je $(0, +\infty)$ a obor hodnot je $\mathbb{R}$

z věty

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$$

$$\text{platí } \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

17) Umocňování obecných reálných čísel

Pro $b \in (0, +\infty)$ a $x \in \mathbb{R}$ se definuje

$$b^x \text{ jako } \exp(x \ln b)$$

příklad

$$b^4 = \exp(4 \ln b) =$$

$$\begin{aligned} & \exp(\ln b + \ln b + \ln b + \ln b) \\ &= \exp(\ln b) \cdot \exp(\ln b) \cdot \exp(\ln b) \cdot \exp(\ln b) = \\ &= \cancel{b} \cdot b \cdot b \cdot b = b^4 \end{aligned}$$

- 3 případy:
- $b = 1 \rightarrow b^x = 1$
 - $b \in (0, 1) \rightarrow$ klesající
 - $b \in (1, +\infty) \rightarrow$ rostoucí

Logaritmus o základu b $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ pro

$b \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $b^x = \exp(x \ln b)$ a

inverzní je $\log_b x$

18) Funkce sinus a cosinus

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

obě řady konvergují pro libovolné $x \in \mathbb{R}$

↑ definované pomocí součtu mocniné řady, obecně $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow$ analytické funkce

19) Limita funkce - jednostranná, vlastní, nevlastní

Funkce f má v bodě $A \in \mathbb{R}^*$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, když

ekvivalentně

$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0:$

$$f(P(A, \delta)) \subseteq U(L, \varepsilon) \quad \lim_{x \rightarrow A} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in P(A, \delta): f(x) \in U(L, \varepsilon)$$

- funkce f nemusí být ani v bodě A definována

Jednostranné limity

① zprava

$$\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in P^+(A, \delta): f(x) \in U(L, \varepsilon)$$

② zleva

$$\lim_{x \rightarrow A^-} f(x) = L \Leftrightarrow \text{---} // \text{---} : \forall x \in P^-(A, \delta) : \text{---} // \text{---}$$

jednostranné limity v nevlastních bodech nedefinujeme

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow A^-} f(x) = L$$

20) Spojitosť a jednosmerná spojitosť funkcie

Funkcie f je v bode $A \in \mathbb{R}$ spojité, pokiaľ

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = f(A)$$

funkcie je v bode $A \in \mathbb{R}$ spojité zprava pokiaľ

$$\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = f(A)$$

a spojité zľava pokiaľ

$$\lim_{x \rightarrow A^-} f(x) = f(A)$$

☺ Funkcie f je spojité v bode $A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ je spojité v A zľava i zprava

nebo

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in \mathbb{R}: |x - A| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(A)| < \varepsilon$$

← def. obor f
musí obsahovať
 A i nejaké
okolí

Riemannova
funkcie

↳ príklad, kedy
je spojitosť ťažké
vyriešiť a
nieže
odhľadať z
grafu

21) Interval, netriviální interval, vnitřní a krajní bod.

Spojitosť funkce na intervalu

Interval $I \subseteq \mathbb{R}$ je taková množina, že pro 3 libovolné čísla $x, y, z \in \mathbb{R} : x < y < z$, tak pokud x a z náleží I , tak i y náleží I

Interval je netriviální pokud obsahuje alespoň 2 body, (tudíž nekonečně mnoho bodů)

krajní bod je nejmenší / největší prvek ležící v intervalu I

- pravý = největší
- levý = nejmenší

vnitřní bod I je bod, w není krajní

Spojitosť na intervalu

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ a nechť $I \subseteq M$ je netriviální interval, pak funkce f je spojitá na intervalu $I \Leftrightarrow f$ je spojitá v každém vnitřním bodě I

a jednosměrně spojitá v krajních bodech I

↳ levý krajní bod (spojitá zprava)

↳ pravý krajní bod (spojitá zleva)

22) Extrémy funkcí - lokální, globální, ostré a neostré

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Funkce f v bodě $A \in M$ nabývá (na množině M).

① maxima když $\forall x \in M : f(x) \leq f(A)$

② ostrého maxima když $\forall x \in M \setminus \{A\} : f(x) < f(A)$

③ lokálního maxima když $\exists \delta > 0 : \forall x \in M \cap U(A, \delta) : f(x) \leq f(A)$

④ ostrého lokálního maxima když $\exists \delta > 0 : \forall x \in M \cap U(A, \delta) : f(x) < f(A)$

↖ body na D_f
} globální
↖ prostě lokálně

obdobně : minimum, ostré minimum, lokální minimum a
ostré lokální minimum

extrém = lokální minimum nebo lokální maximum

Ne triviaální interval je kompaktní pokud obsahuje
oba své krajní body, tedy $[A, B]$ pro $A, B \in \mathbb{R}$

23) Derivace funkce - vlastní, nevlastní, jednostranná a diferencovatelná funkce

Derivace funkce f v bodě A je limita

$$f'(A) := \lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x) - f(A)}{x - A}$$

nebo

$$f'(A) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A+h) - f(A)}{h}$$

přeznačení $\rightarrow$
 $x - A = h$

jednostranná derivace

- zprava $f'_+(A)$
- zleva $f'_-(A)$

} jen změna:
 $x \rightarrow A^\pm$
 $h \rightarrow 0^\pm$

Pokud $f'(A) \in \mathbb{R}$, pak f má v bodě A vlastní derivaci

• $f'(A) \in \{-\infty; +\infty\}$, pak f má v bodě A nevlastní derivaci

$f'(A)$ nemusí
existovat
 $\rightarrow$

Pokud má f v bodě A vlastní derivaci, tak je f v bodě A diferencovatelná

$$(f(x))' \big|_{x=A}$$

$\uparrow$ u složitějších
výpočtů

$$f'(A) \text{ existuje} \Leftrightarrow f'_-(A) = f'_+(A)$$

2.4) Derivace vyšších řádů

Nechť f je funkce; $m \in \mathbb{N}_0$; necht' $A \in \mathbb{R}$.

Derivace n -tého řádu funkce f v bodě A nebo

n -tá derivace f v bodě A je $f^{(n)}(A)$

$$\bullet f^{(0)}(A) = f(A)$$

pro $n \geq 1$ platí:

$$f^{(n)}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(A+h) - f^{(n-1)}(A)}{h}$$

Značení $f^{(1)} = f'$

$$f^{(2)} = f''$$

$$f^{(3)} = f'''$$

, dále už nepřehlédne'

→ pro ověření
konkávity,
konvexity, ...

k existenci derivace
 n -tého řádu
musí existovat
derivace $n-1$ řádu,
respektive 0 až
 $n-1$ řádu

25) konvexita a konkávnost funkce

Nechť I je interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je

$$f'' > 0 \leftarrow$$

• konvexní pokud pro $\forall A, x, B \in I: A < x < B$:

$$f(x) \leq f(A) + (x-A) \frac{f(B) - f(A)}{B-A}$$

• ryze konvexní

- předchozí nerovnost ostrá

$$f'' < 0 \leftarrow$$

• konkávní

$$f(x) \geq f(A) + (x-A) \frac{f(B) - f(A)}{B-A}$$

• ryze konkávní

- předchozí nerovnost ostrá

26) Taylorův polynom a Taylorova řada

- nejlepší polynomická aproximace funkce v okolí konkrétního bodu

Pokud má f v $A \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, tak má graf f v bodě A tečnu $t(x) = f(A) + f'(A)(x - A)$

$t(x)$ je pak nejlepší aproximace a platí pro ni

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x) - t(x)}{(x - A)^n} = 0$$

pro polynomy vyššího stupně, nejvíc: $n \rightarrow$ pak Taylorův polynom

Taylorův polynom

Necht' $A \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a f definovaná na okolí A a v A spojitá a má v A vlastní n -tou derivaci $f^{(n)}(A) \in \mathbb{R}$

Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě A je:

$$T_n^{f,A}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(A)}{i!} (x - A)^i =$$

$$= f(A) + f'(A)(x - A) + \frac{f''(A)}{2!} (x - A)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(A)}{n!} (x - A)^n$$

$$T(x) = T_n^{f,A}(x) \text{ platí } T(A) = f(A), T'(A) = f'(A), \dots, T^{(n)}(A) = f^{(n)}(A)$$

pro $n \geq 1$ platí $(T_n^{f,A})' = T_{n-1}^{f',A}$ pro $n=1$ předpokládá spojitost f' v A

ten faktoriál je násobkem derivací

$$0^0 = 1$$

pro mocninu řádu

definováno i pro $x=A$

$$f^{(0)} = f$$

spojitost jen pro

$f^{(0)}$, tedy $n=0$ protože pro ostatní $n > n$ polynom stupně n plyne z v. derivace

27) Značení $f(x) = o(g(x))$ a $f(x) = O(g(x))$

pro $x \rightarrow A$

① $f(x) = O(g(x))$ pro $x \rightarrow A$

redukované okolí $P(A)$ a konstanta $C > 0$, taková, že
platí $|f(x)| \leq C |g(x)|$

- " f roste nanejvýš stejně rychle jako g "

② $f(x) = o(g(x))$ pro $x \rightarrow A$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists$ redukované $P(A) : \forall x \in P(A) :$

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

" f je v okolí A zanedbatelná, roste striktně pomaleji!"

příklad ve
skriptech na
výpočte $\circ$ pomocí
Taylorovy řady

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}$$

Taylorova řada

- přechází do nekonečna navedl od polynomu

Má-li funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů,
pak Taylorova řada se středem v A je:

$$T_{f,A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(A)}{n!} (x-A)^n$$

a příklady ve
skriptech

28) Otevřený interval, primitivní funkce

interval I je otevřený pokud I nemá žádný krajní bod.

Nechť I je otevřený interval. Řekneme, že funkce $f(x)$ má na intervalu I primitivní funkci $F(x)$

$$\text{pokud pro } \forall x \in I: F'(x) = f(x)$$

jednoznačná
až na konstantu

29) Newtonův integrál

Nechť $A, B \in \mathbb{R}$ a $A < B$. Funkce $f: (A, B) \rightarrow \mathbb{R}$ má na intervalu (A, B) Newtonův integrál, když má f na (A, B) primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity, tedy

$$\lim_{x \rightarrow A^+} F(x) = F(A^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow B^-} F(x) = F(B^-)$$

$$[F]_A^B \text{ značí rozdíl } F(B^-) - F(A^+) = \lim_{x \rightarrow B^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow A^+} F(x)$$

$$(N) \int_A^B f(x) dx := [F]_A^B = F(B^-) - F(A^+) = \lim_{x \rightarrow B^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow A^+} F(x)$$

primitivní funkce se liší jen o konstantu, tak potom nezávisí na volbě F

třída integrovatelných
funkcí $\rightarrow$

$$\mathcal{N}(A, B) = \{ f: f \text{ má na } (A, B) \text{ Newtonův integrál} \}$$

30) Riemannův integrál

Někdy $A < B$ jsou 2 reálná čísla.

Konečná $(k+1)$ -tice bodů $D = (A_0, A_1, \dots, A_k)$ z

intervalu $[A, B]$ je jeho dělením počtem

$$A = A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_k = B$$

Tyto body dělí interval $[A, B]$ na intervaly $I_i = [A_i, A_{i+1}]$

délka intervalu $|I_i| = A_{i+1} - A_i$

$$|[A, B]| = B - A$$

horní Riemannova suma (pro $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$, dělení $D = (A_0, A_1, \dots, A_k)$)

dolní $s(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| m_i$, kde $m_i = \inf \{ f(x) ; x \in I_i \}$

horní $S(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| M_i$, kde $M_i = \sup \{ f(x) ; x \in I_i \}$

jsou vždy definované $s(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$S(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

dolní Riemannův integrál

$$(R) \int_A^B f(x) dx = \sup \{ s(f, D) : D \text{ je dělení } [A, B] \}$$

horní Riemannův integrál

$$(R) \int_A^B f(x) dx = \inf \{ S(f, D) : D \text{ je dělení } [A, B] \}$$

31) Zjemnění dělení

Pro dvě dělení $D = (A_0 < A_1 < \dots < A_k)$ a

$D' = (A'_0 < A'_1 < \dots < A'_l)$ stejného intervalu I .

Pak D' je dělení pokud $\{A_0, A_1, \dots, A_k\}$ je podmnožina

$\{A'_0, A'_1, \dots, A'_l\}$

32) Výpočet objemu a povrchu rotačních těles

$$f: [A, B] \rightarrow [0, +\infty)$$

$$\text{Těleso } T(A, B, f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : A \leq x \leq B \wedge \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x) \}$$

vznikne otáčením plochy $U(A, B, f)$ kolem osy x vzdálenost

→ prostě součet
všech kruhů

Objem tělesa je $\pi \int_A^B f(t)^2 dt$ pokud integrál existuje

↳ počítáme obsahy dvou rozměrných řezů (kruhů) přes $t \in [A, B]$ $\leftarrow \pi r^2$

Plocha tělesa $T(A, B, f)$ je plocha vzniklá otáčením grafu

$$P(A, B, f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : A \leq x \leq B \wedge \sqrt{y^2 + z^2} = f(x) \}$$

Povrch $P(A, B, f)$ pak definujeme jako

$$2\pi \int_A^B f(t) \cdot \underbrace{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} dt \quad \text{pokud má derivaci a existuje integrál}$$

graf musí rovnoměrně přiblížit na skutečnou délku křivky

→ příklad válece
a koule (povrch)
ve skriptech

horní i dolní Riemannův integrál je vždy

definovaný a má hodnoty z $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

funkce f je Riemannovsky integrovatelná pokud

$$\underline{(R) \int_A^B f} = \overline{(R) \int_A^B f} \in \mathbb{R}$$

společná hodnota se značí

$(R) \int_A^B f(x) dx$ — Riemannův integrál funkce f na intervalu $[A, B]$

třída všech
riemannovsky $\rightarrow$
integrovatelných
funkcí

$R[A, B] := \{ f : f \text{ je definovaná a Riemannovsky} \\ \text{integrovatelná} \}$

asi doplnit

33) Výpočet plošného obsahu rovinných oblastí omezených grafy dvou funkcí

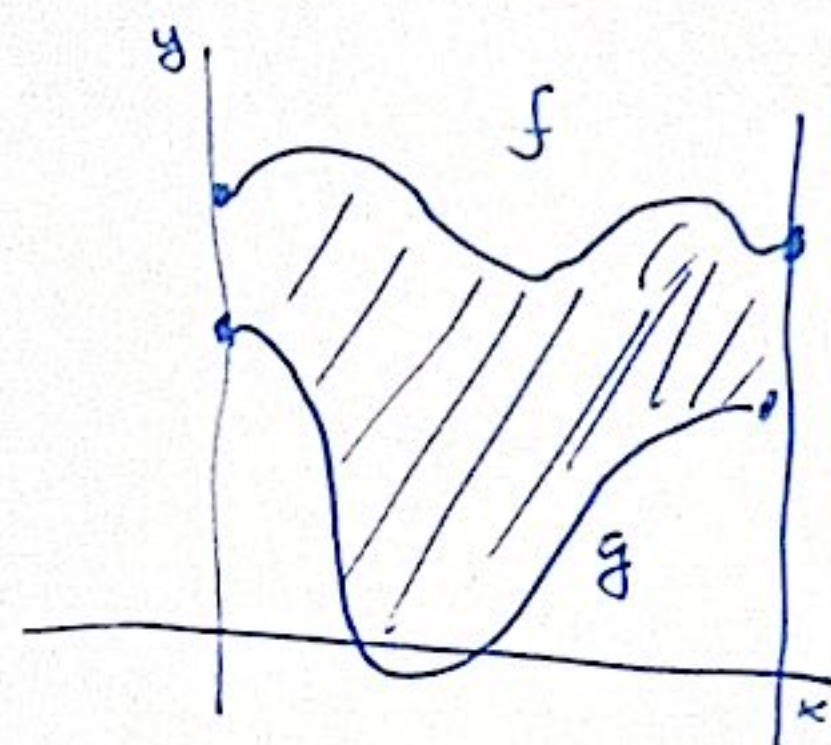
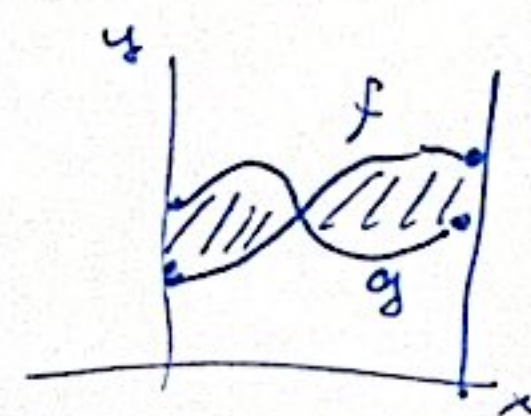
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\} \quad a$$

Obsah této množiny je dán

$$S = \int_A^B (f(x) - g(x)) dx$$

pokud se kříží

$$S = \int_A^B |f(x) - g(x)| dx$$



součet přes
všechny
rozděly

34) Křivka a její délka

Křivka = spojitý obraz intervalu

Nechť $I = [A, B] \subseteq \mathbb{R}$ a $A < B$

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$, tedy uspořádaná d-tice

↖ v d-rozměrném prostoru

$(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, kde $\varphi_i: I \rightarrow \mathbb{R}$

γ je spojitá na I znamená, že $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ jsou spojitá na I . Derivace γ v $x \in I$ je

vektor $(\varphi_1'(x), \dots, \varphi_d'(x))$

$$L = \int_A^B \|\gamma'(t)\| dt$$

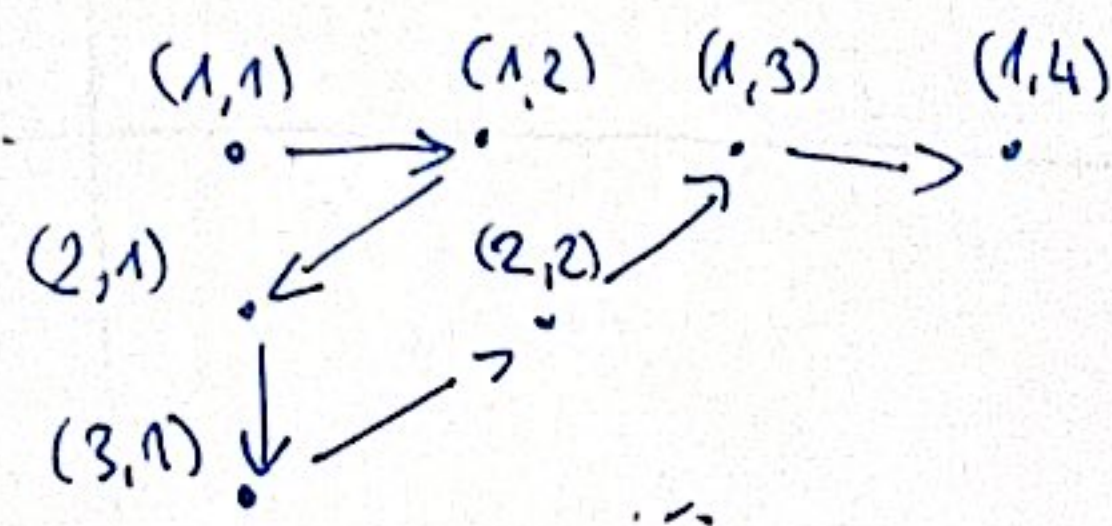
$$a \quad L = \int_A^B \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_d'(t))^2} dt$$

1) Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná

Věta:

Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná, neboť existuje bijekce

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$



2) Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná

Věta: Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná

$$\text{Tedy } |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$$

Důkaz (sporem)

Necht $\mathbb{R}$ je spočetná. $\exists$ prosté $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$

Uvažme posloupnost reálných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

α_n je reálné číslo, co f zobrazí na n a pokud takové neexistuje, tak $\alpha_n = 0,00\dots$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ obsahuje všechna reálná čísla

Zkonstruujme číslo $\beta = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$, kde b_i se bude

lišit od α_i na i -tém místě

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \pm a_0^1, \underline{a_1^1} a_2^1 a_3^1 \\ \alpha_2 &= \pm a_0^2, a_1^2 \underline{a_2^2} a_3^2 \\ \alpha_3 &= \pm a_0^3, a_1^3 a_2^3 \underline{a_3^3} \end{aligned}$$

β se od všech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ liší, což je spor s tím, že tato jsou všechna čísla
} vyberu lišící se 2 z {1, 2, ..., 9}
nejmenší možnou, tedy většinou 1 nebo 2

3) Cantorova - Bernsteinova věta o mohutnostech množin

Věta:

Pokud existuje prosté zobrazení z A do B a prosté zobrazení z B do A , pak existuje bijekce mezi těmito množinami $(|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A|) \Rightarrow |A| = |B|$

4) Vlastnosti suprema pro $\mathbb{R}$

Věta: Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum

5) Jednoznačnost limity posloupnosti

Věta:

Každá posloupnost (a_n) reálných čísel má nejvýše 1 limitu (vlastní či nekonečnou).

Důkaz: (sporem)

Předpoklad, že (a_n) má 2 limity $K, L \in \mathbb{R}^*$

Vezmeme $\varepsilon > 0$ tak malé, aby

$$\mathcal{U}(K, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(L, \varepsilon) = \emptyset$$

Pak z definice limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \text{ tedy existuje } n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \implies a_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

to samé pro druhou limitu se dostaneme n_2

$$\text{pak } n = \max \{n_1, n_2\}$$

a musí platit $a_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(K, \varepsilon)$, což je

spor s $\mathcal{U}(L, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(K, \varepsilon) = \emptyset$ pro dostatečně malé ε

6) Existence limits monotonic sequences

Věta: Každá monotonic sequence $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ má
v $\mathbb{R}^*$ limitu.

Důkaz:

Předpokládejme, že (a_n) je slabě rostoucí

$$S = \sup \{ a_n : n \in \mathbb{N} \} \quad \Leftrightarrow \quad S \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

← protože to
nemá prázdnou
množinu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S$$

pomocí definice

$$\forall \varepsilon \in (0, +\infty) : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : a_n \in U(S, \varepsilon)$$

← najdeme n_0

Tedy platí z definice suprema

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq S$$

$$\nexists T \in \mathbb{U}$$

Zvolíme $T < S$, tedy T není horní mez a existuje

n takové, že $T < a_n$ a n_0 bude nejmenší index s

touto vlastností, pak

$$T < a_{n_0} \leq S, \text{ tedy } a_{n_0} \in \mathbb{U}$$

$$\text{A tedy } \forall n \geq n_0 : a_n \in \mathbb{U}$$

7) Aritmetika limit

Věta Nechť (a_n) , (b_n) jsou posloupnosti reálných čísel s $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \in \mathbb{R}^*$.

Potom:

(I) Je-li $k+L$ definované, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = k+L$

(II) Je-li $k \cdot L$ definované, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = k \cdot L$

(III) Je-li $\frac{k}{L}$ definované a $b_n \neq 0$ pro $\forall n$, tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{k}{L}$$

(IV) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |k|$

→
~~sta~~
žijuje jednosměrně,
tedy pokud
limita na pravé
straně neexistuje,
neexistuje L_0 ,
že limita
neexistuje

8) Věta o limitě a uspořádání

Věta:

Nechť (a_n) je posloupnost s limitou $A \in \mathbb{R}^*$

a (b_n) je posloupnost s limitou $B \in \mathbb{R}^*$

Pak platí:

1) Pokud $A < B$, pak $\exists n_0 : m, n \geq n_0 : a_m < b_n$

2) Pokud pro nekonečně mnoho indexů n platí

$$a_n \leq b_n, \text{ tak } A \leq B$$

Důkaz:

První bod

Nechť $A > B$, tak zvolím dost malé $\varepsilon > 0$, aby

$$\mathcal{U}(A, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(B, \varepsilon) = \emptyset, \text{ pak lze najít } n_1,$$

$$\text{aby } \forall n \geq n_1 : a_n \in \mathcal{U}(A, \varepsilon) \text{ a } n_2, \text{ aby } \forall n \geq n_2 : b_n \in \mathcal{U}(B, \varepsilon)$$

Pak $m, n \geq \max \{n_1, n_2\}$ platí $a_m > b_n$

Druhý bod (obměna první implikace)^{body}

Pro spor $A > B$, Pro dostatečně velkou m, n platí $a_m > b_n$

pak je to ve sporu s tím, že pro nekonečně

$$\text{mnoho indexů } n \text{ platí } a_n \leq b_n$$

$$\exists a_m > b_n \text{ pro}$$

všechna m, n

neplyne, že

$$A > B, \text{ ale}$$

$$\text{pouze } A \geq B$$

např.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \text{ a } \left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

↓
obě limity 0

9) Věta o dvou políciích pro posloupnosti

Věta:

Mějme tři posloupnosti splňující $a_n \leq b_n \leq c_n$
pro každé $n \geq n_0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme, že (a_n) i (c_n) mají obě
stejnou limitu $L \in \mathbb{R}^*$.

Pak má i (b_n) limitu rovnou L .

10) Ekvivalence dvou definic hromadného bodu (jako limity podposloupnosti a jako bodu, jehož všechna okolí obsahují nekonečně mnoho prvků posloupnosti)

1. definice:

Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Pak rozšířené reálné číslo $H \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem, právě když je limitou nějaké podposloupnosti (a_{n_k})

← množina všech hr. bodů je $\mathcal{H}(a_n)$

Alternativní definice

$H \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti $(a_n) \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$ takových, že

$$a_n \in U(H, \varepsilon)$$

← hromadný bod se nemusí v posloupnosti vyskytovat

Důkaz:

$\Rightarrow$

$K \in \mathcal{H}(a_n)$ a (b_n) je podposloupnost, tedy existuje

$\forall \varepsilon > 0$:

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, že $b_n = a_{f(n)}$. Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = K$, tak

zvolením dostatečně velkého n platí $b_n \in U(K, \varepsilon)$,

tedy i $a_{f(n)} \in U(K, \varepsilon)$, tedy i pro nekonečně mnoho indexů $a_n \in U(K, \varepsilon)$

$\Leftarrow$
Pro $K \in \mathbb{R}^*$ ^(a $\varepsilon > 0$) existuje nekonečně mnoho n takových, že $a_n \in U(K, \varepsilon)$

$\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ a $f(1)$ je nejmenší takové, že $a_{f(1)} \in U(K, \varepsilon_1)$ ← takových je tedy nekonečně mnoho

$f(1) < f(2) < \dots < f(n-1)$ jsme už určili $f(n)$ je nejmenší n takové, že $n > f(n-1)$ a $a_n \in U(K, \varepsilon_n)$

(b_n) definovaná jako $b_n = a_{f(n)}$ je podposloupnost (a_n) s limitou K

11) Existence monotónní podpostoupnosti

Věta:

Každá postoupnost $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ má monotónní podpostoupnost.

Důkaz:

Prvek a_n je nízký pokud je oške menší než všechny prvky, co následují po něm.

1) postoupnost obsahuje nekonečně mnoho nízkých prvků

$$n_1 < n_2 < \dots$$

$$\text{tedy } a_{n_1} < a_{n_2} < \dots$$

Pak už existuje rostoucí podpostoupnost

2) postoupnost má konečně mnoho nízkých prvků

tedy existuje poslední nízký prvek a za ním už

žádný, tedy $f(1)$ je index prvků za posledním, tedy

$a_{f(1)}$ určitě není nízký.

Pak to znamená negaci, tedy: pro nekonečnou postoupnost už není nízký prvek, tedy jsou tam opaky a lze vybrat

$$a_{f(1)} \geq a_{f(2)} \geq a_{f(3)} \geq \dots \quad \text{tedy zase monotónní}$$

podpostoupnost

Důsledek:

Každá postoupnost má alespoň 1

• normální

rod

12) Bolzano - Weierstrassova věta

Věta: Každá omezená posloupnost má reálný
hromadný bod. Tedy každá omezená posloupnost
má konvergentní podposloupnost.

Důkaz:

(a_n) má monotónní podposloupnost. a každá
monotónní podposloupnost má limitu, tedy alespoň
1 hromadný bod a pokud je (a_n) omezená, tak
ten hromadný bod musí být reálný.

13) Posoupnost má limitu, právě když má jediný hromadný bod

Věta:

Pokud má posoupnost (a_n) limitu L , tak L je jejím jediným hromadným bodem, tedy každá podposoupnost (a_{n_k}) má tuto limitu.

^{stejně}
(Opačně) Má-li (a_n) $\mathcal{H}(a_n) = \{H\}$, kde $H \in \mathbb{R}^*$, pak je i limitou (a_n) .
↗ množina hromadných bodů

14) Existence $\limsup$ a $\liminf$

Věta:

Nechť (a_n) je posoupnost a $\mathcal{H}(a_n)$ je množina hromadných bodů (a_n) , pak největší prvek $\mathcal{H}(a_n)$ je limes superior a nejmenší limes inferior.

Pro každou posoupnost $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ má množina

$\mathcal{H}(a_n)$ největší i nejmenší prvek v $\mathbb{R}^*$, tedy vždy existuje $\limsup$ a $\liminf$.

15) Nutná podmínka pro konvergenci řady

Věta:

Pokud je řada konvergentní, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Důkaz:

$$S_n = a_1 + \dots + a_n \quad \text{částečný součet}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} \text{odečtením na druhé straně}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}, \text{ kde } S_0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \overbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n}^{\text{mají stejnou limitu}} - \overbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}}^{\text{mají stejnou limitu}} = S - S = 0$$

16) konvergenca geometrických radí v závislosti na hodnote koeficientu

Věta:

Pro součet geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1 \\ +\infty & \text{pro } q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

Důkaz:

že vzorec pro číselný součet

$$S_n = 1 + q^1 + \dots + q^{n-1} \quad \leftarrow \text{máme od nuly}$$

$$qS_n = q + q^2 + \dots + q^n$$

$$S_n - qS_n = 1 + q - q + q^2 - q^2 + \dots + q^{n-1} - q^{n-1} - q^n$$

$$(1-q)S_n = 1 - q^n$$

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

1) Pro $|q| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \stackrel{AL}{=} \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

2) Pro $q \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \stackrel{AL}{=} \frac{+\infty - 1}{q-1} = +\infty$$

3) Pro $q \leq -1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \text{neexistuje} \quad \text{a} \quad \text{ani } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ neexistuje}$$

17) Vlastnosti exponenciální funkce

Věta:

Pro exponenciální funkci $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

platí:

(I) $\forall x \in \mathbb{R}: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je konvergentní

(II) $\exp(0) = 1$

(III) $\exp(x)$ je rostoucí na $(-\infty; +\infty)$

(IV) $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

(V) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(VI) $\left. \begin{array}{l} \forall x < 0: \exp(x) \in (0, 1) \\ \forall x > 0: \exp(x) \in (1, \infty) \end{array} \right\} \exp(x) \text{ je rostoucí na } \mathbb{R}$

(VII) $\text{Im}(\exp(x)) = (0, +\infty)$

inverzní funkce k $\exp(x)$ je $\ln(x)$

$x^y = \exp(y \ln(x))$ pro $x \in (0, +\infty)$ a $y \in \mathbb{R}$

18) Jednoznačnost limity funkce

Věta: Funkce má v daném bodě nejvýše 1 limitu

Důkaz:

Předpokládejme, že pro f a bod $A \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow A} f(x) = L', \quad \text{tedy dvě různé}$$

$$L, L' \in \mathbb{R}^*$$

Zvolíme $\varepsilon > 0$ dost malé, aby $\mathcal{U}(L, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(L', \varepsilon) = \emptyset$

a pro toto ε lze použít definice limity

Tedy pro $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L$ musí existovat $\delta > 0$, že

$$f(P(A, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(L, \varepsilon) \quad \text{a} \quad \delta' > 0, \quad \text{že} \quad f(P(A, \delta')) \subseteq \mathcal{U}(L', \varepsilon),$$

tedy zvolím

$$\delta'' = \min \{ \delta, \delta' \} \quad \text{a} \quad \text{pak platí}$$

$$f(P(A, \delta'')) \subseteq \mathcal{U}(L, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(L', \varepsilon), \quad \text{což je ale}$$

$$\text{správně a} \quad \mathcal{U}(L, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(L', \varepsilon) = \emptyset$$

13) Heineho věta o ekvivalentní definici limity funkce

Věta: Heineho definice limity funkce

Nechť $A, L \in \mathbb{R}^*$, $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť M obsahuje nějaké prstencové okolí $P(A, \delta_0)$ bodu A . Pak jsou ekvivalentní:

$$1) \lim_{x \rightarrow A} f(x) = L$$

2) Pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ a

$$\forall n: x_n \neq A, \text{ pak } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

Důkaz:

$\Rightarrow$

Platí bod I, tedy existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$, že $f(P(A, \delta)) \subseteq U(L, \varepsilon)$

a máme předpokládanou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, pak existuje

n_0 , tedy $\forall n \geq n_0: f(x_n) \in U(L, \varepsilon)$ a $x_n \neq A$, tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

$(x_n) \rightarrow A$
z definice
limity
dostaneme, že
 $f(x_n) \in U(L, \varepsilon)$

$\Leftarrow$ (I neplatí $\Rightarrow$ II neplatí)

Předpokládám, že $\lim_{x \rightarrow A} f(x) \neq L$ nebo neexistuje

Tedy existuje $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ platí, že existuje

$x \in P(A, \delta)$, že $x \notin U(L, \varepsilon)$

Definuji $S_n = \frac{1}{n}$ pro $1, 2, 3, \dots$, tedy vybereme

předpokládanou posloupnost (x_n) 1) podmnožina M

2) $(x_n) \rightarrow A$

3) $\forall n: x_n \neq A$

ale vždy se najde v sebemenším okolí problematické x

tedy $f(x_n) \notin U(L, \varepsilon)$, proto $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq L$

20) Aritmetika limit funkcí

Věta:

Pro nějaká $A, K, L \in \mathbb{R}^*$ a funkce f, g platí:

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow A} g(x) = K$$

Dat:

Ⓘ Pokud je $K+L$ definované, tak $\lim_{x \rightarrow A} f(x) + g(x) = L + K$

Ⓜ Pokud je $K \cdot L$ definované, tak $\lim_{x \rightarrow A} f(x) \cdot g(x) = L \cdot K$

Ⓢ Pokud je $\frac{L}{K}$ definované, tak $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$

$$\lim_{x \rightarrow A} |f(x)| = |L|$$

21) Souvislost limity funkce a uspořádání

Nechť f a g jsou funkce, pro které platí

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow A} g(x) = K$$

pro nějaká $A, L, K \in \mathbb{R}^*$. Pak:

Ⓘ Pokud $K > L$, tak $\exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in P(A, \delta) : g(x_1) > f(x_2)$

Ⓜ Pokud $\forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in P(A, \delta) : g(x_1) \geq f(x_2)$,

pak $K \geq L$

i když

$\frac{1}{2} \text{ a } \frac{1}{2} g(x_1) > f(x_2)$, tak
pro pořadí $K \geq L$

22) Existence jednostranných limit monotónní funkce

Věta:

Nechť f je funkce:

1) Nechť $A \in \mathbb{R}$. Pokud f je monotónní na nějakém levém prstencovém okolí A , pak má limita zleva v A .

Pokud f je monotónní na ^{nejakém} pravém prstencovém okolí A , pak má limita zprava v A .

2) Pro $A \in \{-\infty, +\infty\}$. Pokud je f monotónní na nějakém okolí A , tak má v A limitu.

23) Věta o dvou polícijských pro funkce

Věta: Mějme tři funkce f, g, h a $A, L \in \mathbb{R}^*$

Nechť platí $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = \lim_{x \rightarrow A} h(x) = L$

A nechť existuje nějaké $\delta > 0$, pro které platí, že

$\forall x \in P(A, \delta) : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, pak i

$g(x)$ má v bodě A limitu L .

24) Věta o limitě složené funkce

Nechť funkce f a g splňují

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$$

$$\lim_{x \rightarrow B} g(x) = L$$

pro nějaká $A, B, L \in \mathbb{R}^*$

A nechť je splněna alespoň 1 z podmínek:

1) B i L jsou reálná čísla a platí $g(B) = L$

2) Na nějakém prstencovém okolí $P(A, \delta)$ funkce

$f(x)$ nenabývá hodnotu B $B \notin f(P(A, \delta))$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow A} g(f(x)) = L$$

25) Bolzanova věta o nulovém bodu spojité funkce

Věta:

Nechť $I = [A, B]$ je netriviální interval a
nechť $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na I , tak
pokud platí $f(A) > 0 > f(B)$ nebo $f(A) < 0 < f(B)$,
pak potom $\exists c \in (A, B) : f(c) = 0$

Důkaz:

Předpoklad, že $f(A) < 0 < f(B)$

$Z = \{x \in [A, B] \mid f(x) < 0\}$ - je určitě neprázdná a shora omezená

Ukázat, že $f(s) = 0$, kde s je supremum $\uparrow$
 B je její horní mez

Pro spor:

1) $f(s) > 0$

f je tedy spojitá zleva v bodě $s \in (A, B]$

$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: f(P^-(s, s)) \subseteq U(f(s), \varepsilon)$ $\varepsilon = f(s)$ a δ

a funkce je kladná na celém intervalu $(s - \delta, s)$, což nepatří $\nearrow$ protože s je kladné

do množiny a $s - \delta < s$ a $s - \delta$ je horní mez, tedy s nemůže být $\nearrow$ supremum

2) $f(s) < 0$

patří do $[A, B)$

- f spojitá v s zprava je záporná na celém

intervalu $(s, s + \delta)$, když spor s tím, že s je horní mez $\nearrow$

protože $s + \delta$ je záporná $\nearrow$ a horní mez

Pak $f(s) = 0$

26) Nutný věrný obecných mezíhodnot pro spojitě funkce

Věta:

Nechť f je spojitá na $I = [A, B]$, kde $A < B$ a

existuje $m \in \mathbb{R}$, pro které platí $f(A) < m < f(B)$

nebo $f(A) > m > f(B)$, pak $\exists c \in [A, B] : f(c) = m$

Důkaz:

Mějme f a m z věty.

Pak definujeme $g(x) = f(x) - m$

g je tedy spojitá a platí pro ni

$g(A) < 0 < g(B)$ nebo $g(A) > 0 > g(B)$ a

podle Bolzanovy věty platí, že $\exists c : g(c) = 0$,

tedy $f(c) = m$

27) Spojitá funkce zobrazí interval na interval

Věta: Je-li $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na I , pak $f(I) = \{ f(x); x \in I \}$ je taky interval

28) Nabývání extrémů ("princip maxima") pro spojitě funkce

Věta:

Nechť $I = [A, B]$ je kompaktní interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na I , pak f nabývá na I svého maxima a minima.

29) Uzávěrnost spojitých funkcí na součet, součin, podíl, složení funkcí

Věta:

1) Pokud je funkce f a g spojité v bodě A ,
tak i funkce $f+g$ a $f \cdot g$ jsou spojité v tomto
bode.
A pokud $g(A) \neq 0$, pak i f/g je spojitá v A .

2) Pokud je funkce f spojitá v A a $f(A) = B$
a funkce g je spojitá v B , tak i funkce
 $g(f(x))$ je spojitá v A .

30) Prostá spojitá funkce na intervalu je ryze
monotónní a její inverzní funkce je také spojitá

1) Pokud je f spojitá a prostá na intervalu I ,
tak je na tomto intervalu rostoucí nebo
klesající

2) Pokud je f spojitá a prostá na intervalu I ,
tak její inverzní funkce je spojitá na $f(I)$

3) Funkce $\exp, \cos, \sin$ jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Z (2) pak plyne, že i $\ln$ je spojitá na $(0, \infty)$

31) Spojitost diferencovatelné funkce

Věta:

Má-li funkce f v bodě A vlastní derivaci,
pak je f v A spojitá.

Důkaz:

$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = f(A)$ $\leftarrow$ stačí se k tomu dojit definicí spojitosti

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = \lim_{x \rightarrow A} (f(x) - f(A) + f(A)) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow A} \left(\frac{f(x) - f(A)}{x - A} (x - A) + f(A) \right) =$$

$\rightarrow$ pořadí jen násobení

$$= f'(A) \cdot \lim_{x \rightarrow A} (x - A) + f(A) =$$

$$= f'(A) \cdot 0 + f(A) = f(A)$$

32) Aritmetika (skládání) derivací

Věta :

Nechť f a g jsou funkce, které mají v bodě A vlastní derivaci.

$$1) (f+g)'(A) = f'(A) + g'(A)$$

$$2) \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R} \text{ platí } (\alpha f)'(A) = \alpha \cdot f'(A)$$

$$3) (fg)'(A) = f'(A)g(A) + f(A) \cdot g'(A)$$

$$4) \text{ Pokud } g(A) \neq 0, \text{ pak}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(A) = -\frac{g'(A)}{g^2(A)}$$

$$5) \text{ Pokud } g(A) \neq 0, \text{ pak}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(A) = \frac{f'(A)g(A) - f(A)g'(A)}{g^2(A)}$$

diskredit
VoAL

Leibnizova
formule $\rightarrow$

důkaz
přes definici
derivace
a odvozením

vyplyvá
ze 4.
tvrzení

33) Vzorečky pro derivace základních funkcí $\sin$,

$\cos$, $\ln$, $\exp$, x^a

Věta: (pomocí derivace mocninách reál)

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{pro } a \in \mathbb{R}$$

34) Věta o derivaci složené funkce

Věta:

Nechť f je funkce s vlastní derivací v bodě A .

Nechť $B = f(A)$ a g je funkce s vlastní derivací v bodě B . Pak definujeme složenou funkci

$$h(x) = g(f(x))$$

a platí

$$h'(A) = g'(B) \cdot f'(A) = g'(f(A)) \cdot f'(A)$$

35) Věta o derivaci inverzní funkce

Věta:

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce
která je monotónní a spojitá na I .

A $g: f(I) \rightarrow I$ je inverzní funkce k f . Nechť B

je vnitřní bod I a $f(B) = A$. A pokud má

funkce f v bodě B vlastní nenulovou derivaci,

pak platí:

$$g'(A) = \frac{1}{f'(B)}$$

36) L'Hospitalovo pravidlo

Věta : • Necht' $A \in \mathbb{R}^*$

• Necht' $P(A, \delta)$ je nějaké prstenkové okolí A

• Necht' funkce $f, g : P(A, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ mají na prstenkovém

• okolí vlastní derivaci

• Necht' $g'(x) \neq 0$ na $P(A, \delta)$

• Předpokládejme, že existuje limita $L = \lim_{x \rightarrow A} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}^*$

nemusí být
vlastní

Pak:

1) Pokud $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = \lim_{x \rightarrow A} g(x) = 0$, pak

to $L \geq$
předpokladu

$$L = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \rightarrow A} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2) Pokud $\lim_{x \rightarrow A} |g(x)| = +\infty$, pak

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \rightarrow A} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

→

platí i pokud se
mávkou jedносторонними

limitami, při

předpokládám

jedностороннее okolí,

ale derivace

musí existovat

двустороннее

37) Jednostranná derivace jako limita oboustranné derivace

Věta: Necht' je funkce f spojitá na intervalu

$[A, B)$, kde $A < B$ a f má na (A, B) vlastní

derivaci a platí pro ni, že limita této derivace je rozšířené číslo

$$\lim_{x \rightarrow A^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}^*$$

Pak f má v bodě A derivaci zprava $f'_+(A) = L$

= spojitost
derivace
v krajním bodě

Důkaz:

definice jednostranné derivace zprava je

$$f'_+(A) = \lim_{x \rightarrow A^+} \frac{f(x) - f(A)}{x - A}$$

a použijme L'Hospitalovo pravidlo:

podmínky: 1) jmenovatel (zjevně nula)

čitatel (také nula kvůli předpokladu spojitosti)

na $[A, B)$

2) čitatel i jmenovatel mají v prvním prostencím okolí A vlastní derivaci

$$\underline{\text{čitatel}} \quad (f(x) - f(A))' = f'(x)$$

$$\underline{\text{jmenovatel}} \quad (x - A)' = 1$$

$$\text{Pak } f'_+(A) = \lim_{x \rightarrow A^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}^*$$

38) Souvislost mezi jednostrannými a oboustrannými

derivacemi a lokálními extrémy

Věta:

Nechť má funkce f derivaci v bodě A zprava, pak: ↖ ne nutně
vlastní

Ⓘ Pokud $f'_+(A) > 0$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\forall x \in P^+(A, \varepsilon): f(x) > f(A)$

Ⓣ Pokud $f'_+(A) < 0$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\forall x \in P^+(A, \varepsilon): f(x) < f(A)$

Obdobně pro derivaci zleva

ⓗ Pokud $f'_-(A) > 0$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\forall x \in P^-(A, \varepsilon): f(x) < f(A)$

Ⓛ Pokud $f'_-(A) < 0$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\forall x \in P^-(A, \varepsilon): f(x) > f(A)$

Důkaz:

Důkaz prvního tvrzení, ostatní podobně.

Předpokládám $f'_+(A) > 0$, tedy

$$\lim_{x \rightarrow A^+} \frac{f(x) - f(A)}{x - A} > 0 \quad \Leftrightarrow \text{tedy výraz je kladný na } P^+(A, \varepsilon)$$

a protože $x > A$, tak z toho výrazu plyne, že

$$f(x) > f(A)$$

39) Rolleova věta

Věta: Necht' $-\infty < A < B < +\infty$

a funkce $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $[A, B]$ a
ma' na intervalu (A, B) derivaci $\leftarrow$ i nevlustní

$f(A) = f(B)$, pak $\exists c \in (A, B)$ platí $f'(c) = 0$

Důkaz:

Pokud je f na $[A, B]$ konstantní $\rightarrow$ tak platí

Pokud ne, tak existuje bod $D \in (A, B)$, pro který

platí $f(D) > f(A) = f(B)$ (nebo menší podobně).

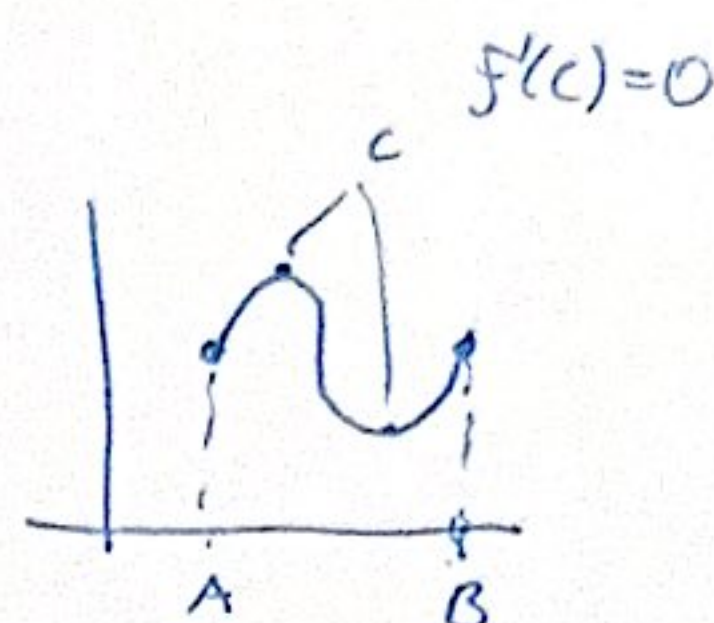
Dle principu (maxima pro spojité funkce) existuje maximum, necht' je to bod C

Platí pro něj tedy $f(C) \geq f(D) > f(A) = f(B)$

Bodem D jsou C vytkací a tedy maximum není v krajních bodech.

Podle věty (lokální extrém ^{funkce f v A} derivace buď neexistuje nebo je rovná nule), tak $f'(C) = 0$

taky věta o
střední hodnotě
Lagrangeova je
obecnější.



$\leftarrow$ nutná podmínka
pro lokální
extrém

Obecnější
než Rolleova

40) Lagrangeova věta o střední hodnotě

Věta:

↓
tedy $f(A)$ není
nutně rovno $f(B)$

Necht' $-\infty < A < B < +\infty$ a funkce $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ je
na $[A, B]$ spojitá a má na intervalu (A, B)
derivaci. Pak existuje $C \in (A, B)$, pro které platí

i nerostní →

$$f'(C) = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

Důkaz:

vytvořím si pomocnou přímku
 $p(x) = f(A) + (x - A) \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$

procházejí →
body $[A, f(A)]$
 $[B, f(B)]$

a proložíme stejnou funkcí ještě, tedy

$$h(x) = f(x) - p(x)$$

najdeme
 $C \in (A, B)$

Pro tuto funkci^h ověříme podmínky Rolleovy věty a

$$1) h(A) = h(B) = 0$$

2) h je na $[A, B]$ spojitá – složená ze spojitých funkcí

$$3) h'(x) = f'(x) - \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

derivate →
 $h(x)$

Tedy existuje $C \in (A, B)$

$$f'(C) - \frac{f(B) - f(A)}{B - A} = 0$$

snažili →
doházet

$$f'(C) = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

4.1) Souvislost znaménka derivace a monotonie na intervalu

Věta: Necht' $J \subseteq \mathbb{R}$ je netriviální interval
a $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je na J spojitá a má v každém
vnitřním bodě J derivaci. Potom:

- Pokud, $f' > 0$ je f rostoucí
- $f' \geq 0$ je f nelesající
- $f' < 0$ je f klesající
- $f' \leq 0$ je f nerostoucí

Důkaz:

jen případ $f' > 0$

pro libovolná $A, B \in J$, pro které platí $A < B$

← chci dokázat
 $f(A) < f(B)$

Z Lagrangeovy věty platí, že existuje $C \in (A, B)$,

pro které platí $A < C < B$ a tedy

$$\frac{f(B) - f(A)}{B - A} = f'(C) > 0$$

→ protože z předpokladu je derivace kladná

$B - A > 0$ (z předpokladu) a tedy $f(B) - f(A) > 0$

a tedy $f(A) < f(B)$

42) Souvislost mezi konvexitou, monotonií první derivace a znaménkem druhé derivace

Věta: Necht' f je spojitá na intervalu I a má derivaci v každém vnitřním bodě I .

Potom:

- 1) Pokud f' je na I rostoucí, pak f je na I ryze konvexní.
- 2) Pokud f' je na I neklesající, pak f je na I konvexní.
- 3) Pokud f' je na I klesající, pak f je na I ryze konkávní.
- 4) Pokud f' je na I nerostoucí, pak f je na I konkávní.

Souvislost s 2. derivací (pokud existuje)

$$f'' > 0 \quad (\text{ryze konvexní})$$

$$f'' \geq 0 \quad (\text{konvexní})$$

$$f'' < 0 \quad (\text{ryze konkávní})$$

$$f'' \leq 0 \quad (\text{konkávní})$$

Důkaz:

Necht' f není ryze konvexní, tedy použijte definici konkávnosti a existují body $A < C < B$

$$f(C) \geq f(A) + (C-A) \cdot \frac{f(B)-f(A)}{B-A} \quad \leftarrow \text{je-li dostatek vnitřní bod } C$$

z toho lze odvodit

$\leftarrow$ tedy lze odvodit

$$\frac{f(C)-f(A)}{C-A} \geq \frac{f(B)-f(A)}{B-A} \geq \frac{f(B)-f(C)}{B-C}$$

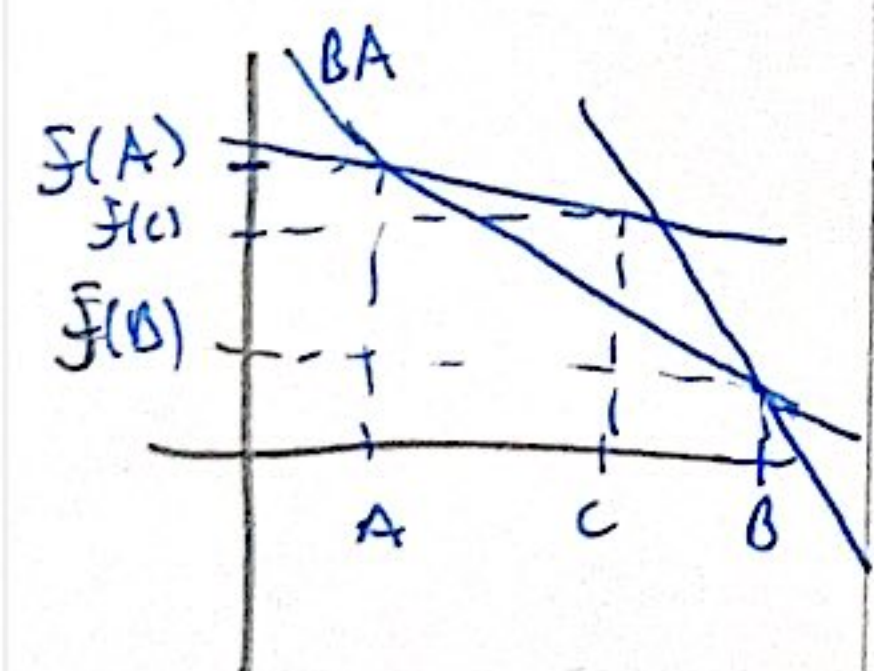
pak pomocí Lagrangeovy věty

$$\exists D \in (A, C) : f'(D) = \frac{f(C)-f(A)}{C-A}$$

$$\exists E \in (C, B) : f'(E) = \frac{f(B)-f(C)}{B-C}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(D) = \frac{f(C)-f(A)}{C-A} \\ f'(E) = \frac{f(B)-f(C)}{B-C} \end{array} \right\} f'(D) \geq f'(E)$$

$\leftarrow$ tedy f' není rostoucí



43) Charakterizace Taylorova polynomu pomocí

vztahu $f(x) - T(x) = o((x-A)^n)$

Věta: Necht' funkce f má Taylorův polynom

řádu $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $A \in \mathbb{R}$. Pak $T(x) = T_n^{f,A}(x)$ je

jedliný polynom stupně nejvýše n , který splňuje

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x) - T(x)}{(x-A)^n} = 0$$

✓ Též lze zapsat jako $f(x) = T(x) + o(|x-A|^n)$ pro $x \rightarrow A$

pokud definuji: $f(x) = o(g(x))$ pro $x \rightarrow A$ pokud $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$f(x) = O(g(x))$ pro $x \rightarrow A$ pokud $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)}$

je omezená
na prstencovém
okolí

44) (Ne) jednoznačnost primitivní funkce na intervalu

Věta:

Je-li $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ na otevřeném intervalu I . Pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je

$F(x) + c$ také primitivní funkce k $f(x)$. A

naopak jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k

$f(x)$, tak $\exists c \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = c$ pro $\forall x \in I$.

Důkaz:

Pokud F je primitivní funkce k f , tedy

$F'(x) = f(x)$, pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí také

$$(F(x) + c)' = f(x) + 0 \quad \text{na } I.$$

Pokud $F'(x) = G'(x) = f(x)$ na I , tak pak

$$(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{tedy funkce je}$$

$\propto F(x) - G(x)$

nehlásající a neustálá, tedy konstantní

45) Spojitosť primitívnej funkcie

Veľta: Je-li I otvorený interval a funkcie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je na I spojitá, pak má f na I primitívnu funkciu.

(Spojitosť sluší k existencii primitívnej funkcie, ale není nutná.)

Důkaz (není ve skriptech)

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (F(x+h) - F(x)) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \cdot h \right) = 0 \Leftrightarrow \exists \Delta h$$

$\Leftrightarrow$ tedy má
derivaci ve
všech bodech
intervalu

důkaz
postějí
str. 96

Libovolné $C \in I$ a funkce $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme takhle:

$$F(x) = \begin{cases} (R) \int_C^x f(t) dt & \text{pro } x \geq C \\ -(R) \int_x^C f(t) dt & \text{pro } x < C \end{cases}$$

- z 1. základní věty analýzy

46) Funkce, jejíž jednostranná limita se liší od funkční hodnoty, nemá primitivní funkci

Věta:

Nechť I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce co má primitivní funkci na I . A nechť A je libovolný bod I .

Potom (pro obě strany - obdobně) platí:

$$\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = f(A)$$

$$\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) \text{ neexistuje}$$

} buď je spojitá nebo vůbec nemá limitu zprava

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$$

ne má primitivní

funkci na intervalu obsahujícím 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$$

pohled $\rightarrow$
neexistuje,
který

ot. č. 37 $\rightarrow$

Důkaz:

Nechť máme I, f a A

Předpoklad, že existuje $\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = L \in \mathbb{R}^*$

Použijte větu o spojitosti derivace v krajním bodě $\Leftarrow$ z ot. č. 45

předpoklady: 1) F je spojitá na I

2) F má derivaci dle f

3) F' má limitu zprava

$$\text{věta říká } F'_+(A) = L$$

$$F'_+(A) = F'(A) = f(A)$$

$\Leftarrow$ protože F má všude derivaci rovnou f

$$f(A) = L = \lim_{x \rightarrow A^+} f(x)$$

47) Výpočet primitivní funkce pomocí metody per partes

Věta: Nechtě jsou funkce f a g spojité na otevřeném intervalu I a funkce F a G jsou k nim na I primitivní. Potom i funkce fG a Fg mají na I primitivní funkce a platí:

$$\int fG + \int Fg = FG + c$$

ekvivalentně

$$\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx + c$$

Důkaz:

fG a Fg jsou spojité, tedy existuje pro ně primitivní funkce.

$$(FG)' = fG + Fg \quad \text{podle derivace součinu}$$

$$\int fG + \int Fg = \int (fG + Fg) = FG + c$$

48) Výpočet primitivní funkce pomocí metody substituce

Věta:

Nechť I je otevřený interval a nechť

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ má na I primitivní funkci. A f je ot.
interval

nechť $\varphi: J \rightarrow I$ funkce, co má v každém bodě

$t \in J$ kladnou derivaci. Pak $F(\varphi(t))$ je

primitivní funkce k $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

Důkaz:

$$F(\varphi(t))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \text{pomocí derivace složené funkce}$$

49) Metoda per partes pro Newtonův integrál

Věta

Nechť f a g jsou 2 funkce spojité na $[A, B]$.

Nechť mají primitivní funkce F a G a lze

je spojité rozšířit na $[A, B]$. Pak existují oba

určité integrály $(N) \int_A^B fG$ a $(N) \int_A^B Fg$

a platí:

$$(N) \int_A^B fG = [FG]_A^B - (N) \int_A^B Fg$$

$$(N) \int_A^B fG + (N) \int_A^B Fg = [FG]_A^B$$

50) Substituční metoda pro Newtonův integrál

Věta:

Nechť $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a
 (α, β)

má ve všech bodech vlastní derivaci.

Nechť funkce φ zobrazí $[\alpha, \beta]$ na $[A, B]$ a

f je spojitá na $[A, B]$ a tedy newtonovsky

integrovatelná na (A, B) , pak:

$$(N) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = (N) \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$$

5.1) Odhady čístečných součtů řad pomocí integrálu

Věta:

odhad konvergenční
i nekonečných
sum

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f: [1, n] \rightarrow \mathbb{R}$. Pak

1) Pokud je f klesající na $[1, n]$, tak

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + \dots + f(n)$$

2) Pokud je f rostoucí na $[1, n]$, tak

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \geq \int_1^n f(x) dx \geq f(2) + \dots + f(n)$$

Důkaz:

1. případ

Nechť f je klesající, potom dolní Riemannova suma

$$\text{je } s_-(f, D) = f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)$$

a horní Riemannova suma je

$$S(f, D) = f(2) + \dots + f(n)$$

$$\text{Pak } s_-(f, D) \leq \int_1^n f(x) dx \leq S(f, D)$$

52) Integrální kritérium konvergence řad

Věta:

Nechť $f: [1; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ je nerostoucí a
nezáporná funkce, pak potom

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě když:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx < +\infty$$

Důkaz:

$$S_n = f(1) + \dots + f(n)$$

nekonečná
řada $\rightarrow$

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} f(k) := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$\Leftarrow$ S existuje, protože je (S_n) monotónní, ale $S \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$I_n = \int_1^n f \quad \Leftarrow I_n \text{ existuje, protože } f \text{ je monotónní}$$

$$\therefore I_1 \leq I_2 \leq \dots$$

$$I := \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$S_n \geq S_{n-1} \geq I_n = S_n - f(1)$$

pro $n \rightarrow +\infty$ (limitu)

$$S \geq I \geq S - f(1)$$

a tedy $S = +\infty \Leftrightarrow I = +\infty$

53) Konvergence řad tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ v závislosti na α

Důkaz: Nechť $r \in \mathbb{R}$. Pak řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} = \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \dots \quad \text{konverguje,}$$

právě když $r > 1$

Důkaz:

$$1) r=1 \rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = H_n$$

$\rightarrow$ součet harmonických čísel a součet řady je $+\infty$,
tedy není konvergentní

$$2) r < 1 \rightarrow \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \dots + \frac{1}{n^r} = H_n$$

$\nearrow$ čím spíš diverguje, děláme menší čísla

$$3) r > 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^r} : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{a řada konverguje} \Leftrightarrow$$

$$\text{platí } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_1^n \frac{1}{x^r} dx \right) < +\infty \quad \text{integrální kritérium}$$

$$f(x) = x^{-r}$$

$$\text{funkce } F(x) = \frac{x^{-r+1}}{-r+1} = \frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{x^{r-1}}$$

$\nwarrow$ výpočet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_1^n x^{-r} dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{n^{r-1}} - \frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{1^{r-1}} \right) = \frac{1}{r-1} < +\infty$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Riemannovým integrálem

Věta:

Nechť $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce a D_1 a D_2 jsou dvě dělení intervalu $[A, B]$. Potom platí:

$$s(f, D_1) \leq \underline{(R)} \int_A^B f \leq \overline{(R)} \int_A^B f \leq S(f, D_2)$$

Důkaz:

Z dělení D_1 a D_2 vezmu sjednocení D' jako jemnější dělení

Pak podle pozorování 1) $s(f, D) \leq s(f, D')$

2) $s(f, D) \leq s(f, D')$ a

$$S(f, D') \leq S(f, D)$$

Pak

$$s(f, D_1) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D_2)$$

a tedy

$$s(f, D_1) \leq s(f, D') \leq \underline{(R)} \int_A^B f \leq \overline{(R)} \int_A^B f \leq S(f, D') \leq S(f, D_2)$$

Seřaditelnost
mezi zjemněním

(54)

intervalu a
hodnotami
Riemannových
sum

Věta:

Nechť D je dělení
 $[A, B]$ a D' je
zjemnění. Pak
pro každou
funkci
 $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$
platí

neomezené funkce

Vera:

Pohod je funkce f na nějakém intervalu $[A, B]$
neomezená, nemůže tam být riemannovsky
integrovatelná

Dikar (protipitkled):

↑
 $f(x) = \frac{1}{x^{0,9}}$ na na $(0,1)$ primitivní funkci

$$F(x) = \frac{x^{0,1}}{0,1} = 10 x^{0,1}$$

$$(N) \int_0^1 f(x) dx = [10x^{0.1}]_0^1 = 10$$

doplnit

U Riemannova integrálu se stane, že supremum bude $+\infty$ na největším podintervalu

$\hookrightarrow$ na intervalch nižšie nastat, že supremum bude
 $< \infty$ a infimum $- \infty$ a ~~nastat~~ ~~sejda~~ ~~sejda~~ se neže nestati;
 že horní i dolní integrál
 mají stejnou
 hodnotu

Další (nověc)

man v →
prozedurisch

Dalsi (narric)

$$A < B < C \quad \text{u} \quad f: [A, C] \rightarrow \mathbb{R} \text{ piece'}$$

$$(R) \int_A^C f = (R) \int_A^B f + (R) \int_B^C f$$

$$f \in R[A, C] \Leftrightarrow f \in R[A, B] \text{ \& } f \in R[B, C]$$

57) Kritérium Riemannovské integrovatelnosti , Stern

Věta:

Nechť $I = [A, B]$, $A < B$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, Pak:

$$f \in R[A, B] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ dělení } I: S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$$

$\Downarrow$
 f je Riemannovsky
integrovatelná

- kritérium
Riemannovské
integrovatelnosti

$\nwarrow$ prostě můžeme
najít pro libovolné
 ε dělení, aby
se soumy
přiblížily

Důkaz:

1) $\Rightarrow$

protože $(R) \int_A^B f$ je supremum dolních Riemannových sum
a infimum horních, tak platí:

$$s(f, D_1) > (R) \int_A^B f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro libovolné } \varepsilon > 0 \text{ existuje dělení } D_1 \text{ a } D_2$$

$$S(f, D_2) < (R) \int_A^B f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\nwarrow$ zjemňující dělení

$$(R) \int_A^B f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, D_1) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D_2) < (R) \int_A^B f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Pak platí: $\underline{S(f, D') - s(f, D') < \varepsilon}$

2) $\Leftarrow$ (obměnou)

$$\text{Pokud } f \notin R[A, B] \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall D: S(f, D) - s(f, D) \geq \varepsilon$$

$\nwarrow$ otočená rovnost

a dokážeme, že
platí

3 možnosti:

1. Dolní integrál se od horního liší o kladnou konstantu ε

$$\text{pro každé } D \text{ platí } S(f, D) - s(f, D) \geq \varepsilon$$

2. Dolní i horní integrál shodně a rovnají se $+\infty$

$$s(f, D) = +\infty, S(f, D) = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \text{ tedy } S(f, D) - s(f, D) = +\infty$$

3. Dolní i horní integrál shodně a rovnají se $-\infty$
- obdobná druhé

} ve všech
možnostech
reputí
původní tvrzení
věty, ale obměna ano

58) Riemannovská integrovatelnost monotónních funkcí

Věta:

Je-li funkce $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ na $[A, B]$ monotónní,
potom má na $[A, B]$ Riemannův integrál

Důkaz:

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^k (A_i - A_{i-1}) \left(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^k (A_i - A_{i-1}) (f(A_i) - f(A_{i-1}))$$

volit dělení s
max. délkou intervalu $i=1$

$$A_i - A_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(B) - f(A)} < \frac{\varepsilon}{f(B) - f(A)} \cdot \sum_{i=1}^k (f(A_i) - f(A_{i-1}))$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(B) - f(A)} \cdot (f(A_k) - f(A_0)) = \varepsilon$$

$$f \in R[A, B]$$

vostoucí

59) Riemannovská integrovatelnost spojitých funkcí

Věta:

Je-li funkce $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[A, B]$ spojitá, potom má na $[A, B]$ Riemannův integrál.

Důkaz:

60) První základní věta analýzy

Nechť $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce Riemannovsky integrovatelná na $[A, B]$ a funkce $F: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$F(x) = (R) \int_A^x f(t) dt$$

Potom:

1) F je na $[A, B]$ spojitá

2) Pokud pro $c \in [A, B]$ je f spojitá v c , tak

$$F'(c) = f(c)$$

- pro krajní body platí jednostranně

(např. pokud v A je f spojitá zprava, tak $F'_+(A) = f(A)$)

Důsledek: Pokud f je spojitá na $[A, B]$, tak F je primitivní funkce f .

$$\text{a } (N) \int_A^B f = [F]_A^B = F(B) - F(A) = (R) \int_A^B f$$

6.1) Druhá základní věta analýzy

Věta:

Nechť je funkce $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ newtonovsky integrovatelná na (A, B) , pak platí

$$\underline{(R)} \int_A^B f \leq (N) \int_A^B f \leq \overline{(R)} \int_A^B f$$

pokud newtonovsky
i riemannovsky
integrovatelná

$$(N) \int_A^B f = (R) \int_A^B f$$

Důkaz:

Nechť F je primitivní funkce f na (A, B)

$$F(A) = F(A^+)$$

$$F(B) = F(B^-)$$

Teď F je spojitá na $[A, B]$

Zvolme D dělení $D = (A_0 < \dots < A_k)$

$$I_j = [A_{j-1}, A_j]$$

Langrangeova věta:

$$\forall j: \exists \zeta_j \in I_j: F'(\zeta_j) = \frac{F(A_j) - F(A_{j-1})}{A_j - A_{j-1}}$$

Teď

$$\inf_{x \in I_j} f(x) |I_j| \leq f(\zeta_j) \cdot (A_j - A_{j-1}) = F(A_j) - F(A_{j-1}) \leq \sup_{x \in I_j} f(x) |I_j|$$

sečta pro $j=1, \dots, k$

$$s(f, D) \leq F(A_k) - F(A_0) = (N) \int_A^B f \leq S(f, D)$$