

Relace, funkce

- ✓ • kartézský součin množin
- ✓ • relace mezi X a Y , relace na X
- ✓ • složení relací
- ✓ • reflexivní, symetrické, antisymetrické, tranzitivní relace
- ✓ • ekvivalence, částečné uspořádání, lineární uspořádání
- ✓ • funkce
- ✓ • složení funkcí
- ✓ • funkce prosté (injektivní), na (surjektivní), vzájemně jednoznačné (bijektivní)

Ekvivalence, uspořádání

- ✓ • třídy ekvivalence
- ✓ • množinový rozklad
- ✓ • Třídy ekvivalence tvoří množinový rozklad.
- ✓ • bezprostřední předchůdce
- ✓ • Hasseho diagram
- ✓ • minimální, maximální, největší, nejmenší prvek částečně uspořádané množiny
- ✓ • Existence minimálního prvku v konečné č.u.m.
- ✓ • porovnatelné prvky
- ✓ • řetězec, antiřetězec
- ✓ • šířka, výška č.u.m.
- ✓ • věta o Dlouhém a Širokém

booleovské uspořádání

→ Erdősovo - Szekeresovo lemma

Kombinatorické počítání

- ✓ • počet funkcí z k -prvkové do n -prvkové množiny
- ✓ • potenční množina
- ✓ • charakteristická funkce množiny (char. vektor)
- ✓ • počet podmnožin k -prvkové množiny
- ✓ • počet prostých funkcí z k -prvkové do n -prvkové množiny

- ✓ • permutace
- ✓ • n faktoriál
- ✓ • binomický koeficient
- ✓ • počet k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny
- ✓ • binomická věta
- ✓ • princip inkluze a exkluze
- ✓ • počet permutací bez pevného bodu ✕

Odhady

- ✓ • $2^n \leq n! \leq n^n$
- ✓ • $n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
- ✓ • $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k$
- ✓ • $\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n$

Základy teorie grafů

- ✓ • graf, vrcholy, hrany
- ✓ • úplný graf, kružnice, cesta, úplný bipartitní graf
- ✓ • bipartitní graf
- ✓ • podgraf, indukovaný podgraf
- ✓ • cesta v grafu z v_0 do v_t
- ✓ • souvislý graf
- ✓ • relace dosažitelnosti, komponenty souvislosti
- ✓ • vzdálenost v grafu
- ✓ • matice sousednosti, matice incidence
- ✓ • stupeň vrcholu
- ✓ • princip sudosti

Eulerovské grafy

- ✓ • eulerovský tah
- ✓ • eulerovský graf
- ✓ • charakterizace eulerovských grafů

- ✓ • orientovaný graf
- ✓ • orientovaný tah, orientovaná cesta
- ✓ • orientovaný eulerovský graf
- ✓ • *charakterizace orientovaných eulerovských grafů*

Stromy

- ✓ • kružnice v grafu
- ✓ • strom
- ✓ • list
- ✓ • lemma o koncovém vrcholu
- ✓ • věta o postupné výstavbě stromů
- ✓ • charakterizace stromů
- ✓ • kostra grafu

Rovinné grafy

- ✓ • oblouk, koncové body oblouku
- ✓ • topologická kružnice
- ✓ • rovinné nakreslení grafu
- ✓ • relace dosažitelnosti
- ✓ • komponenty oboukové souvislosti
- ✓ • *Jordanova věta o kružnici*
- ✓ • stěny rovinného nakreslení
- ✓ • K_5 ani $K_{3,3}$ není rovinný
- ✓ • dělení grafu
- ✓ • Kuratowského věta (důkaz jen té lehčí implikace)
- ✓ • Eulerova formule (pro souvislý rovinný graf) ~
- ✓ • *Eulerova formule pro rovinný graf s k komponentami*
- ✓ • horní mez na počet hran rovinného grafu ✓
- ✓ • horní mez na počet hran rovinného grafu bez trojúhelníků
- ✓ • rovinný graf obsahuje vrchol stupně ≤ 5 (případně ≤ 3 , pokud nemá trojúhelníky)

Barvení grafů

- ✓ • obarven~~í~~ grafu, k -obarvitelný graf, barevnost

✓ • klikovost

✓ • barevnost je nejméně tak velká, jako klikovost

✓ • k -degenerovaný graf

✓ • k -degenerovaný graf má barevnost nejvýše $k + 1$ ✓

✓ • věta o 4 barvách

✓ • věta o 5 barvách ~

✓ každý rovinný graf 5-degenerovaný ~
× Platónská tělesa? - 11. přednáška

Pravděpodobnost

✓ • konečný pravděpodobnostní prostor

✓ • elementární jevy, jevy

✓ • klasický pravděpodobnostní prostor

✓ • podmíněná pravděpodobnost

✓ • věta o úplné pravděpodobnosti

✓ • Bayesova věta

✓ • nezávislé jevy

✓ • náhodná veličina

✓ • střední hodnota n.v.

✓ • linearita střední hodnoty

✓ • indikátor jevu

✓ • rozptyl

✓ • Markovova nerovnost ✗

✓ • Čebyševova nerovnost ✗

Definice kartézského součinu množin

↳ značí se $X \times Y$

↳ kartézský součin množin X a Y je množina všech uspořádaných dvojic (x, y) , kde $x \in X$ a $y \in Y$

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$$

↳ Pokud $X = Y$, dostaneme $X \times X$, tedy X^2

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (x, y)$ kartézské souřadnice $\rightarrow$ rovina

Definice relace

↳ (Binární) relace

↳ relace mezi dvojicemi prvků

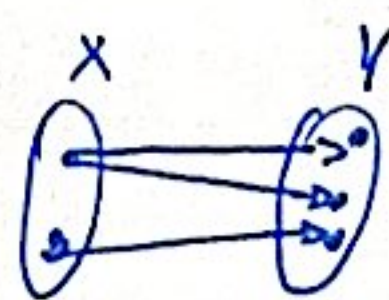
↳ je to podmnožina kartézského součinu $R \subseteq X \times Y$

↳ relace na X $\rightarrow R \subseteq X \times X$

↳ relace mezi X a Y $\rightarrow R \subseteq X \times Y$

↳ příkroby zápisu: $\rightarrow$ do matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} Y \\ \end{matrix} \} X$

$\rightarrow$ šipky mezi X a Y



$\rightarrow$ relace na X : $X = \{1, 2, 3\}$ a $R = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$

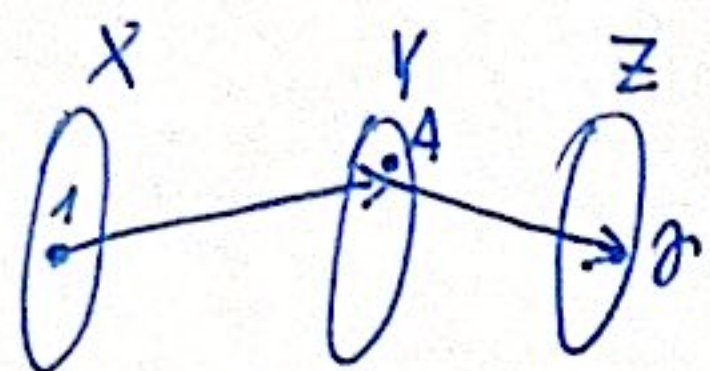
Pokud $(x, y) \in R$, pak $x R y$

Definice složení relací

$$R \subseteq X \times Y$$

$$S \subseteq Y \times Z$$

$$\rightarrow R \circ S = \{ (x, z) ; x \in X, z \in Z \exists y \in Y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S \}$$



$$R \circ S = \{ (1, 8) \dots \}$$

Funkce:

$$g, f \subseteq X \times Y \text{ pokud } \forall x \in X : \exists! y \in Y : (x, y) \in f$$

$$f(x) = y \quad f: X \rightarrow Y \quad g: Y \rightarrow Z$$

$$g \circ f = g(f(x)) \quad (\text{idk})$$

$$\text{prostě: } \forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{na: } \forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$$

bijektivní $\rightarrow$ pokud injektivní a surjektivní

$$\hookrightarrow \text{reflexivní: } \forall x \in X : x R x$$

$$\hookrightarrow \text{symetrická: } \forall x, y \in X : x R y \Rightarrow y R x$$

$$\hookrightarrow (\text{slabě}) \text{ antisymetrická: } \forall x, y \in X : (x R y \wedge y R x) \Rightarrow y = x$$

$$\hookrightarrow \text{transitivní: } \forall x, y, z \in X : (x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z$$

Definice ekvivalence, částečného uspořádání a lineárního uspořádání

ekvivalence $\rightarrow$ pokud je reflexivní, symetrická a transitivní

částečné uspořádání $\rightarrow$ pokud je reflexivní, antisymetrická a transitivní

lineární uspořádání $\rightarrow$ pokud uspořádání a $\forall x, y \in X : x R y \vee y R x$

Definice třídy ekvivalence

↳ Intuitivně: ekvivalence rozkládá množinu X . A v každém kousku jsou si prvky ekvivalentní $\rightarrow$ to jsou třídy ekvivalence

↳ formálně: Necht' R je ekvivalence na X a $x \in X$.

Množinou $R[x] := \{y : (x, y) \in R\}$ $\rightarrow$ jsou třídy ekvivalence R určeny prvkem x

↑ příklad R kongruence mod 3

$$R[0] = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$R[1] = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$R[2] = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

$$R[3] = R[0]$$

Definice množinového rozkladu

↳ rozkladovou množinou

↳ Necht' $\mathcal{U}$ je systém nějakým nepřezlých podmnožin a to je rozklad množiny

X a musí platit: $\bullet \forall x \in X: \exists A \in \mathcal{U} : x \in A$

$\bullet \forall A, B \in \mathcal{U} : A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \neq B$

Třída ekvivalence tvoří množinový rozklad

Veľta: Necht' R je ekvivalence na X , pak třídy ekvivalence R tvoří množinový rozklad množiny X .

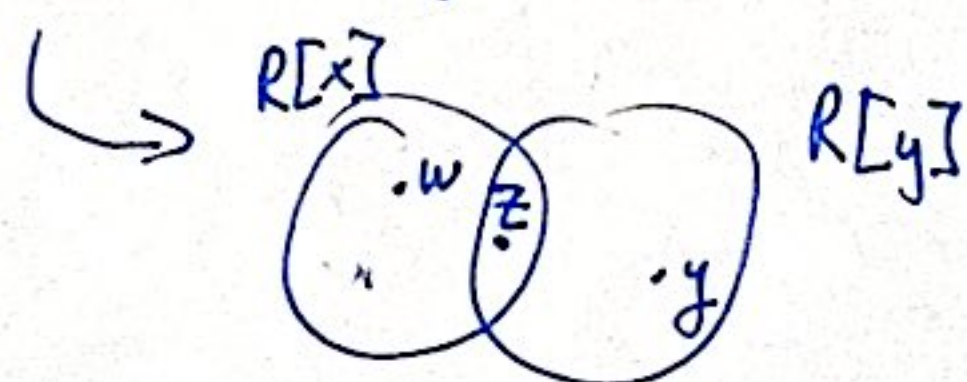
Důkaz:

^{dokázat}
 $\hookrightarrow$ 2 věci, že $x \in X$ je v nějaké třídě $R[x]$ a všechny třídy jsou

disjunktní

sporem, předpoklad: $R[x] \cap R[y] = \emptyset$

$\hookrightarrow z \in R[x] \cap R[y]$



$\rightarrow$ a ukážeme, že $R[x] = R[y]$

$(w, z) \in R \Rightarrow (z, w) \in R$ (symetrie)

$(y, z) \in R \Rightarrow (y, w) \in R$ (transitivita), což je spor s disjunktností

Některé jsou stejné množiny

Jednoznačnost rozkladových tříd (nemí v seznamu)

Věta: Pokud M je rozklad X , pak existuje jediná ekvivalence R na X taková, že $\{R[x] : x \in X\} = M$

Důkaz:

$$(x, y) \in R \iff \exists A \in M : x \in A \wedge y \in A$$

↳ reflexivita : $\forall x \in X : (x, x) \in R$

↳ symetrie : $x, y \in A \Rightarrow y, x \in A$

↳ tranzitivita : $x, y \in R \Rightarrow x, y \in A$
 $y, z \in R \Rightarrow y, z \in B$

ekvivalence $\sim, \approx, \cong$
uspořádaní $\preceq, \trianglelefteq, \leq$

Definice bezprostředního předchůdce

uspořádaní :



↳ Necht $(X, \leq)$ je uspořádaná množina

x je bezprostředním předchůdcem pokud $x \leq y$ a $x \neq y$

pokud $x \leq z \leq y$ tak $z = y$ nebo $x = z$

↳ Pokud $(X, \leq) \rightarrow$ stačí nahradit relaci bezprostředního předchůdce

Definice Hasseho diagramu

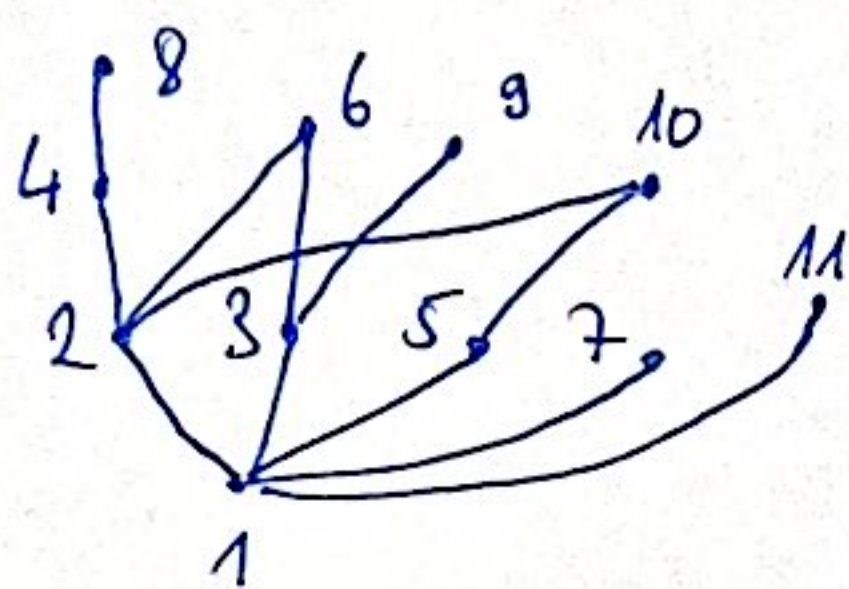
↳ prvky kreslíme, tak aby y bylo nakresleno výše než x , kdykoli

$$x < y$$

př. $a \leq b \Leftrightarrow a$ dělí b

$(1,1), (1,2), (1,3), \dots$

$(2,2), (2,4), \dots$



→ maximální → 8, 6, 9, 10, 11

→ největší → není

→ nejmenší → 1

→ minimální → 1

Definice minimálního, maximálního, největšího a největšího prvku v částečně uspořádané množině

Nechť $(X, \leq)$ je částečně uspořádaná množina

Prvek a je minimální prvek X → pokud neexistuje žádné $x \in X$ takové, že $x < a$

a maximální prvek X → pokud neexistuje žádné $x \in X$: $x > a$

a nejmenší prvek X → pokud pro každé $x \in X$ platí, že $a \leq x$

a největší prvek X → pokud pro každé $x \in X$ platí, že $x \leq a$

Každá neprázdná a konečná množina má minimální prvek

Důkaz:

$x_0 \in X$ je libovolný prvek

Pokud x_0 není minimální, pak existuje x_1 a pokud x_1 není minimální, tak x_2 atd. až po konečné mnoho kroků najdeme minimální. Pokud ne, tak je to spor s konečně velkou množinou

Definice porovnatelných prvků

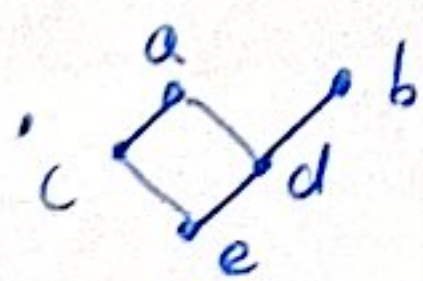
$\hookrightarrow$ Množina $(X, \leq)$ je č.m.m. Prvky x a y jsou porovnatelné pokud $x \leq y$ nebo $y \leq x$. Jinak jsou neporovnatelné

Definice řetězce a antirětězce

řetězec je podmnožina $X \rightarrow A \subseteq X$, kde každé 2 prvky jsou porovnatelné

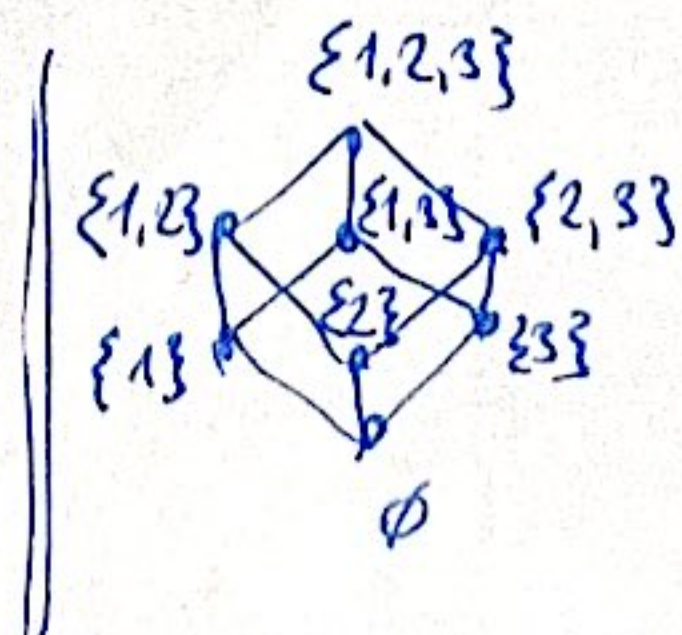
antirětězec je $A \subseteq X$, kde každé 2 různé prvky jsou neporovnatelné

pi. řetězec



řetězec $\rightarrow \{a, e, d\}$

antirětězec $\rightarrow \{c, b\}$



řetězec $\rightarrow \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$

antirětězec $\rightarrow \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

Definice šířky a výšky o.u.m.

Necht' $P = (X, \leq)$ je o.u.m.

šířka $= \alpha(P) :=$ velikost největšího antiřetězce

výška $= \omega(P) :=$ počet prvků největšího řetězce

Věta o dlouhém a širokém

↳ speciálně: Pokud má P konečně prvků, tak $\alpha(P)$ může být malé a $\omega(P)$ může být malé, ale ne obě zároveň

↳ Věta: Pokud $P = (X, \leq)$ č.u.m., pak $\alpha(P) \cdot \omega(P) \geq |X|$

Důkaz:

definujeme množiny $X_1, X_2, X_3, \dots$

X_1 jsou minimální prvky, ty smazáme a pak v P' jsou minimální prvky X_2 a ty smazáme a v P'' máme minimální prvky X_3 atd. Až to jednou skončí v konečně velké množině

a) ↳ každé X_i tvoří nezávislou množinu (antiretězec), takže $|X_i| \leq \alpha(P)$

b) ↳ $X_1, \dots, X_t$ tvoří rozklad $X \rightarrow$ jsou disjunktní a $|X| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_t|$

c) ↳ $t \leq \omega(P)$ $\rightarrow$ musíme najít řetěze délky $\leq t$. Najdeme prvek $x_t \in X_t$ a

ten je $x_{t-1} \in X_{t-1}$ a $x_{t-1} \leq x_t$ atd. až $\{x_1, \dots, x_t\}$ je řetězec

$$|X| = |X_1| + \dots + |X_t| \leq t \cdot \alpha(P) \leq \alpha(P) \cdot \omega(P) \rightarrow |X| \leq \alpha(P) \cdot \omega(P)$$

$|X_i| \leq \alpha(P)$

Počet funkcí z k -prvkové do n -prvkové množiny

↳ Lemma: A, B jsou neprázdné množiny, potom počet všech zobrazení
z A do B je $|B|^{|A|}$

Důkaz:

$B \rightarrow n$ -prvková množina

$A \rightarrow k$ -prvková množina

pro každou A máme n možností $f(1) \rightarrow$ jich zvolit

a pak pro každý $f(1), \dots, f(k)$ dosadit a můžeme zvolit všechny n možností
tedy n^k

Definice mocniny množiny

≡ nebo 2^X

↳ $P(X) \rightarrow$ je množina všech podmnožin množiny X

$$P(X) := \{ A ; A \subseteq X \}$$

↳ pro $X = \emptyset$ je $P(X) = \{ \emptyset \}$

Definice charakteristické funkce množiny A

Necht' $A \subseteq X$, funkce je $X_A : X \rightarrow \{0, 1\}$

definovaná $X_A(a) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } a \in A \\ 0 & \text{pokud } a \notin A \end{cases}$

Počet podmnožin k -prvkové množiny

Věta: Počet všech podmnožin k -prvkové množiny je 2^k

Důkaz:

↳ pomocí charakteristické funkce $x_A(1), x_A(2), \dots, x_A(k)$

↳ u každého prvku se rozhodnu zda tam bude či ne $\rightarrow 2$ možnosti

$$x_A(a) \begin{cases} 1 & \text{je tam} \\ 0 & \text{není tam} \end{cases}$$

↳ a to udělám pro všechny prvky $\leq k$ a tak zjistím, kolik je takových
možností 2^k

Počet prostých funkcí z k -prvkové do n -prvkové množiny

Věta: $A \rightarrow k$ prvková $B \rightarrow n$ -prvková

Počet prostých funkcí z A do B je $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

Důkaz:

pro první $f(1)$ mám n možností, pak pro $f(2)$ už jen $n-1$ atd.

až $(n-k+1)$ nebo-li $\prod_{j=0}^{k-1} (n-j)$

Definice permutace

↳ Permutace je bijekce $A \rightarrow A$

↳ počet je $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

Definice n faktoriál

$$\text{Pro } n \in \mathbb{N} \quad n! = \prod_{j=1}^n 1 \quad 0! = 1$$

Důkaz, že počet sudých podmnožin n -prvkové množiny je 2^{n-1} (nemí v seznamu)

$$|A| = n$$

↳ vybereme si prvek $a_0 \in A$

↳ funkci definujeme $f: P(A \setminus \{a_0\}) \rightarrow S$

$$\text{sudý} \quad f(X) = X$$

$$\text{lichý} \quad f(X) = X \cup \{a_0\}$$

Takže $P(A \setminus \{a_0\})$ je 2^{k-1} prvků, proto je tolik lichých podmnožin a
několik sudých.

Definice binomického koeficientu

$$k, m \in \mathbb{N}_0 \quad \text{a} \quad k \leq m \quad \rightarrow \quad \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \quad \text{je binomický koeficient}$$

Počet k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny

$$\Leftrightarrow \text{věta: } \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \quad \text{udává počet } k\text{-prvkových podmnožin } A, \\ \text{ kde } |A|=m$$

Důkaz:

počet uspořádaných k -tic je $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

$\Leftrightarrow$ počet prostých funkcí z $[k]$ do $[n]$

$c =$ počet k -prvkových podmnožin

$c \cdot k!$

$\Leftrightarrow$ uspořádaných k -tic

$$c \cdot k! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

$$c = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

platí identity:

$$\text{nebo-li } \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$

α

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \quad \binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$$

3)

$$\text{pokud } 0 < k < m \quad \binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}$$

důkaz 3: na levé straně: vybíráme k -prvkové podmnožiny z n -prvků

na pravé straně vybereme k -prvkové z $m-1$ prvků a pak $k-1$ -prvkové z $m-1$ prvků a pak ke všem těm přidáme ten jeden prvek n , tak získáme to samé co na levé straně

Binomická věta

$$\swarrow 0^0 := 1$$

$$\text{Pro } n \in \mathbb{N} \text{ platí } (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Důkaz:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y) \dots (x+y)}_{n \times}$$

z k rávek zvolíme x a z $n-k$ zvolíme $y \rightarrow x^k y^{n-k}$, takových

možností je $\binom{n}{k}$, tedy $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Princip inkluze a exkluze

pro soustavu konečných množin $A_1, \dots, A_n$ platí:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

nebo-li

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Důkaz: pomocí počítání příspěvku k oběma stranám

$$x \in \bigcup_{i=1}^n A_i \rightarrow k \text{ levé straně příspěje jednou } +1$$

k pravé straně

$\hookrightarrow$ předpokládáme, že x patří do j množin A_i

$$1) \sum_{i=1}^n |A_i| \leftarrow \text{prvek příspěje } +j$$

$$2) - \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=2}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \leftarrow \text{prvek příspěje } - \binom{j}{2}$$

$\leftarrow$ protože u každé dvojice množin, kde je j

$$\text{celk. } j - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \binom{j}{4} + \binom{j}{5} - \dots + (-1)^{j-1} \binom{j}{j}$$

$\leftarrow$ ta jediná je od $k=0$

$$\text{proto bin. věta } (-1 + 1)^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^k \cdot (1)^{j-k} = 1 \rightarrow \text{tedy příspěvek k pravé straně}$$

$x=1, y=1$

Počet permutací bez pevného bodu

↳ možno-li problém zjednodušit

$\pi(j) = j \rightarrow$ pevný bod

↳ jako šance, že nikdo nedostane svůj klobouk

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

Důkaz

↳ spočítáme společné permutace $\rightarrow$ s pevnými body $\pi(i) = i$

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$$

↳ definuje se i

$$|A_i| = (n-1)!$$

$$A_i := \{ \pi \in S_n : \pi(i) = i \}$$

$$D_n = S_n - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$$

$$|S_n| = n!$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)! \quad \text{pro } i \neq j$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = D_n$$

↳ kombinuji, kterým bod je fixní

problém zjednodušit

$$\begin{aligned} \tilde{S}(n) &= n! - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = n! - \frac{n!}{1} + \frac{n!}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \\ &= n! \cdot \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Kolik je surjektivních funkcí? z k-prvkové do n-prvkové množiny

$$\text{Surj}(n, m) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

Definice grafu

↳ Graf je uspořádaná dvojice $G(V, E)$

↳ V je konečná neprázdná množina vrcholů

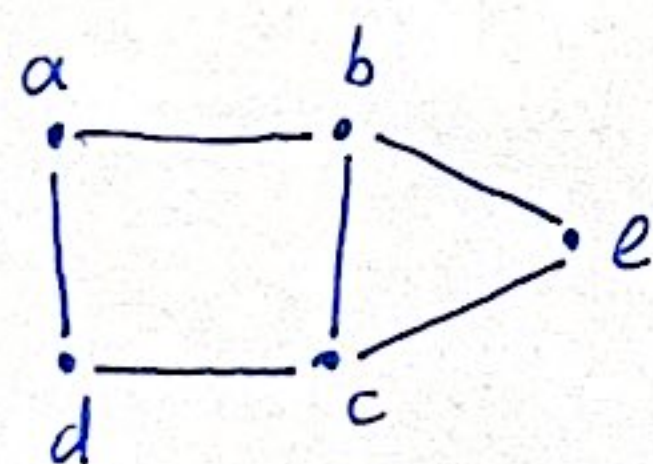
↳ E je množina hran, platí $E \subseteq \binom{V}{2}$

↳ značení $\binom{V}{2}$ = množina všech
dvoupřehových podmnožin

↳ dále $\binom{V}{3}, \binom{V}{4}, \dots \rightarrow$ nepatří do
grafu, jen tak

rozepsaný graf

$$G = (\{a, b, c, d, e\}; \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}, \{c, e\}, \{b, e\})$$



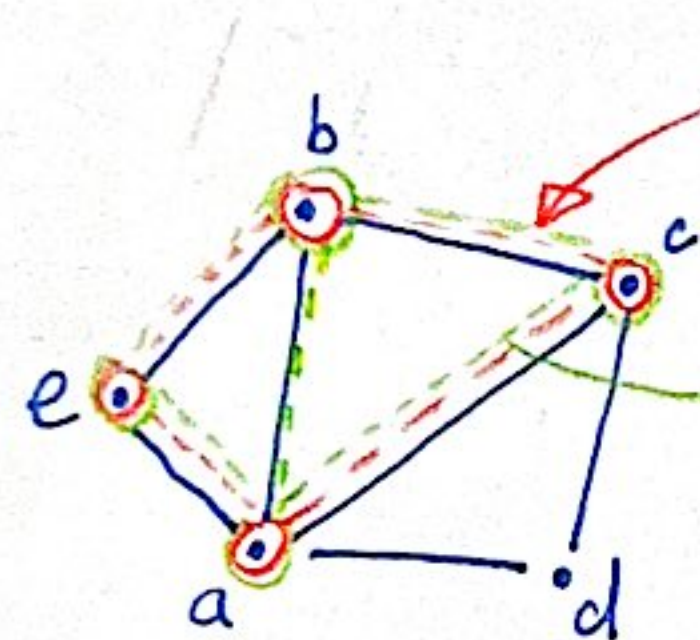
Definice podgrafu a indukovaného podgrafu

$H = (V_H, E_H)$ je podgraf $G = (V_G, E_G)$ pokud $V_H \subseteq V_G$ a $E_H \subseteq E_G$

↳ pozn. z toho zároveň plyne, že $E_H \subseteq \binom{V_H}{2}$, tedy lze napsat $E_H \subseteq E_G \cap \binom{V_H}{2}$

$H = (V_H, E_H)$ je indukovaný podgraf $G = (V, E)$ pokud $V_H \subseteq V_G$ a $E_H = \left(E_G \cap \binom{V_H}{2}\right)$

ukázka:



je podgraf

indukovaný podgraf

↳ obsahuje navíc hranu $\{a,b\}$, tedy všechny hrany, co vrcholy v původním grafu spojují

$(V' \subseteq V_G) \Rightarrow G[V'] = \left(V', \binom{V'}{2} \cap E_G\right) \rightarrow \text{indukovaný podgraf } G \text{ indukovaný } V'$

Definice prázdného grafu

$$E_n = G = ([n], E) \text{ , kde } E = \emptyset$$

$V = \rightarrow$ minimální graf (jeden vrchol)

$\rightarrow$ nulový graf ($V = \emptyset$)

$\rightarrow$ jinak může být neprázdná

Definice úplného grafu

$$K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$$

$\rightarrow$ podle n

$\rightarrow$ každý vrchol je v $n-1$ hranách

$\rightarrow$ všechny vrcholy jsou incidentní

$\rightarrow$ opat je diskrétní

Definice cesty

$$P_n = ([n], \{\{i, i+1\} : i \in \{1, \dots, n-1\}\})$$

$$P_1 = E_1 = K_1 = \bullet \rightarrow P_0 \text{ u I. Kantor}$$

$$P_2 = K_2 = \bullet - \bullet \rightarrow P_n \text{ u I. Kantor}$$

Definice kružnice

$$C_n = ([n], \{\{i, i+1\} : i \in \{1, \dots, n-1\}\} \cup \{1, n\})$$

$\hookrightarrow$ pro $n \geq 3$

$$C_3 = K_3 = \triangle$$

Definice izomorfismu grafů

$$G_1 = (V_1, E_1)$$

$$G_2 = (V_2, E_2)$$

→ sjednoceně řečeno: $G_1 = G_2$ jsou stejné, liší se jen v označení hran → izomorfismus

$f: V_1 \rightarrow V_2$ zobrazení je izomorfismus grafů $\Leftrightarrow$

1. f je bijekce → rozepsané: $\forall u, v \in V_1: f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$ injektivní
 $\forall w \in V_2: \exists u \in V_1: f(u) = w$ surjektivní

2. zachovává incidenci hran

$$\{u, v\} \in E_1 \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$$

→ značení izomorfních grafů $G_1 \cong G_2$

Γ příklad:

$$G_1 = (V_1, E_1) \quad V_1 = \{a, b, c\} \quad E_1 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

$$G_2 = (V_2, E_2) \quad V_2 = \{1, 2, 3\} \quad E_2 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$$

$$f: V_1 \rightarrow V_2 \quad \text{definované } f(a) = 1 \quad f(b) = 2 \quad f(c) = 3$$

1. není bijektivita → prosté: V_2 obrazem právě jednoho prvku z V_1
na: zobrazení pokrývá celou množinu V_2

2. zachová se incidence hran

$$G_1 \cong G_2$$

↳ pokud je počet vrcholů stejný, ale mají různé stupně, pak nemůže být izomorfní

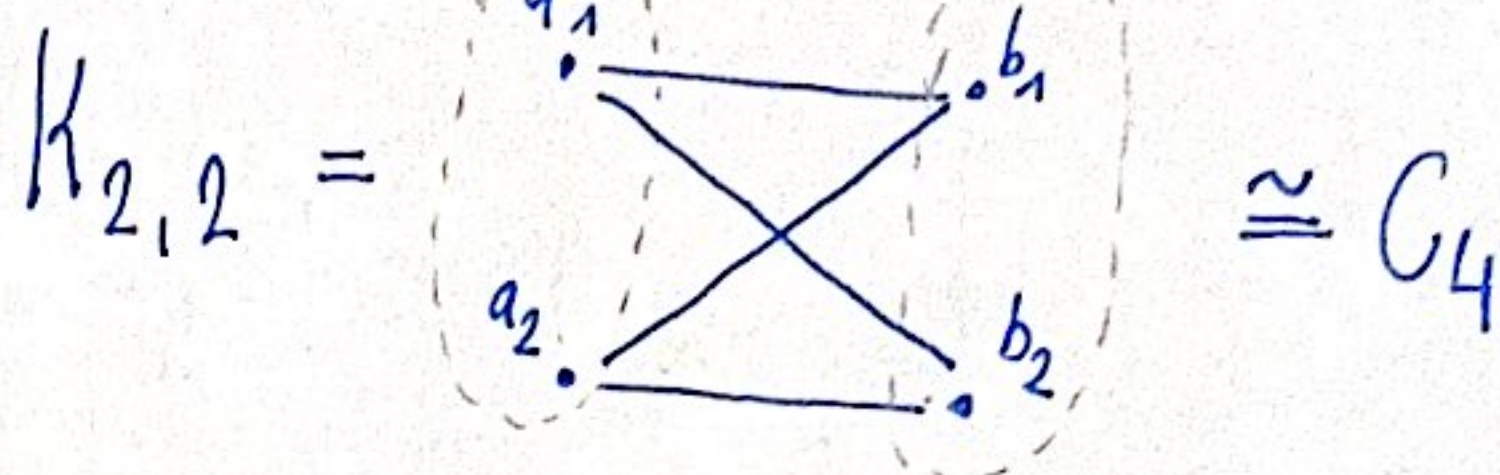
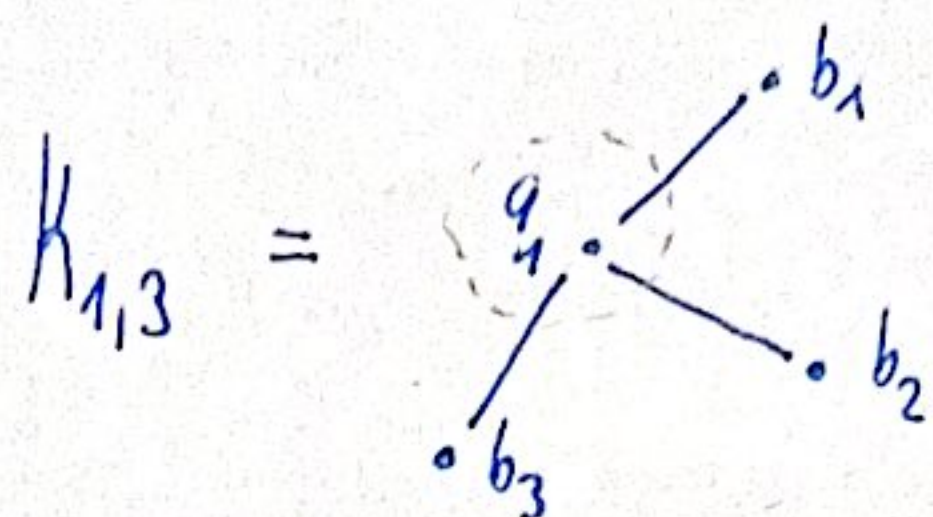
Definice úplného bipartitního grafu

$$K_{m,n} = (V, E)$$

$$\hookrightarrow m, n \in \mathbb{N}$$

$$\hookrightarrow V = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$$

$$\hookrightarrow E = \{\{a_i, b_j\} : i \in \{1, \dots, m\} : j \in \{1, \dots, n\}\}$$



$\hookrightarrow$ má všechny možné hrany mezi partiy

$\hookrightarrow$ pokud $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (disjunktní) a $K_{m,n} = (V_1 \cup V_2, \{\{u,v\} : u \in V_1 : v \in V_2\})$,

tak $v \in V_1 \rightarrow$ má stupeň $|V_2| = n$

$v \in V_2 \rightarrow$ má stupeň $|V_1| = m$

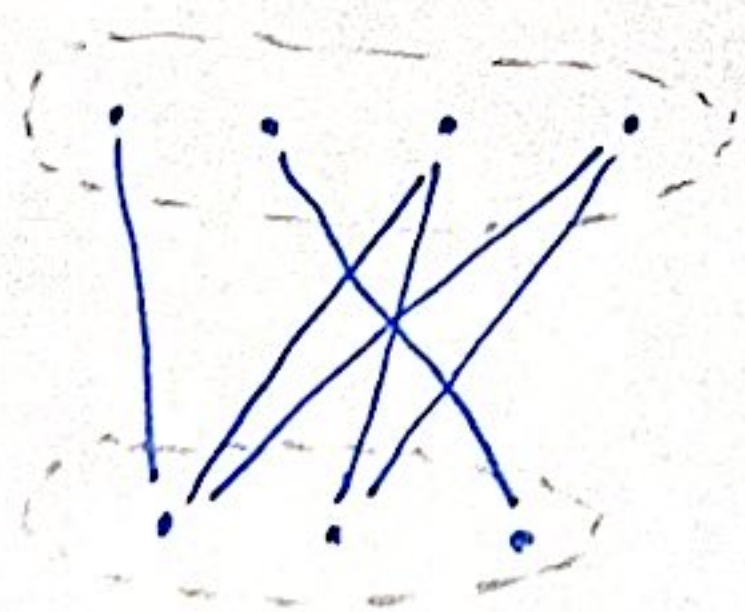
Definice bipartitního grafu

$G = (V, E)$ bipartitní pokud $\exists V_1, V_2 \subseteq V \wedge V_1 \cap V_2 = \emptyset \wedge V_1 \cup V_2 = V$ a

platí $\forall e \in E : |Ane| = 1$

$\hookrightarrow$ jednoduše V_1 a V_2 (dvě partiy) disjunktní množiny vrcholů, tak jsou spojeny hranou pouze s vrcholem z druhé množiny

např.



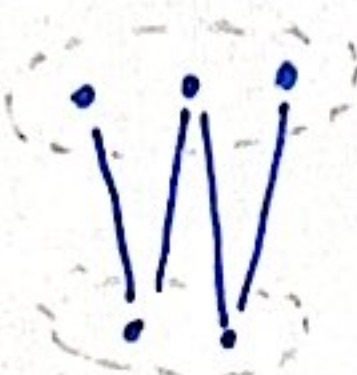
$\rightarrow$ je těžké dokázat, že graf bipartitní není

$\rightarrow$ naopak to, že bipartitní je, tak stačí najít ty vrcholy a rozdělit do dvou množin

↑ doplnění: Kdy je E_n, K_n, P_n, C_n bipartitní?

$E_n \rightarrow$ vždy, žádné hrany, např. $E_3 \dots$

$K_n \rightarrow$ jen pokud $n \leq 2$, $K_1 = \cdot$ $K_2 = \cdot \text{---} \cdot$

$P_n \rightarrow$ vždy, např. $P_5 =$ 

$C_n \rightarrow$ pro sudé n , např. C_6 

↳ pomocí sudých a lichých kružnic lze určit bipartitní grafy

Počet různých grafů

$G=(V,E)$ má počet všech možných grafů $2^{\binom{n}{2}}$ kde $|V|=n \rightarrow$ buď tam

hrana je nebo není, a permutaci n vrcholů

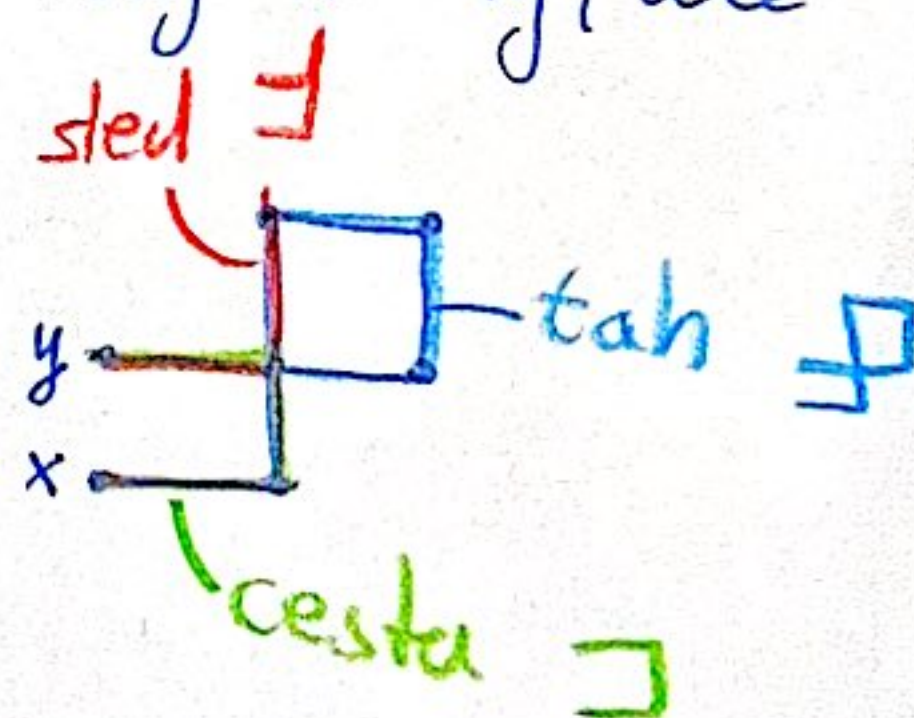
↳ můžeme se opakovat a permutovat $\rightarrow$ isomorfní grafy, asi $n!$,
proto další odhad $\rightarrow$ počet neisomorfních grafů $\geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$

Definice cesty v grafu z x do y

- ↳ je to podgraf izomorfní cestě s koncovými vrcholy x a y
- ↳ vlastně posloupnost
$$\underbrace{v_0}_{\uparrow x}, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, \underbrace{v_k}_{\uparrow y}$$
- ↳ $V = \{v_0, \dots, v_k\}$
- ↳ $E = \{\{v_{i-1}, v_i\} : i \in \{1, \dots, k\}\} \rightarrow$ vlastně hrany tvořící cestu

Typy cest:

- ↳ sleed $\rightarrow$ posloupnost vrcholů taková, že mezi každými dvěma vrcholy je hrana
 $\rightarrow$ může opakovat hrany i vrcholy
- ↳ sah $\rightarrow$ sah je sahový sleed, ve kterém se neopakuje hrany, ale mohou opakovat vrcholy
- ↳ cesta $\rightarrow$ neopakuje ani vrcholy ani hrany



Tvrzení o grafech

$G=(V,E)$, posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$

1) Je-li posloupnost cesta, je to také tah

2) Je-li posloupnost tah, je to také sled

3) Pokud existuje sled z x do y , potom existuje cesta z x do y

1), 2) $\rightarrow$ logicky odvoditelné

3) Důkaz:

$\hookrightarrow$ zvolíme nejkratší ze sledů, což bude cesta a pokud ne, tak existuje vrchol, co se tam vyskytl 2x a tím pádem jde sled zkrátit

Je-li $G=(V,E)$ graf, pak relace "být spojen cestou" tvoří ekvivalenci na V

$\hookrightarrow$ ekvivalence

$\hookrightarrow$ reflexivita z x do x je triviální cesta délky 0

$\hookrightarrow$ symetrická z x do y , pak obrátím cestu a mám z y do x

$\hookrightarrow$ transitivita z x do y a y do z , pak x do z , což platí

$\hookrightarrow$ platí, protože vznikne sled a tedy existuje cesta

Definice souvislosti

$\hookrightarrow$ graf $G=(V,E)$ je souvislý pokud pro každé $u, v \in V$ existuje cesta z u do v

Definice relace dosažitelnosti

$u \sim v \iff v \in G=(V,E)$ existuje cesta z u do v

$\hookrightarrow \sim \rightarrow$ trv. relace dosažitelnosti

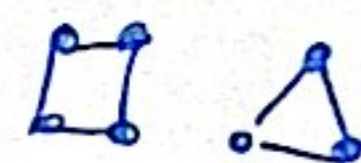
$\rightarrow$ tato relace je ekvivalence, dokážeme dvě

Definice komponenty souvislosti

$\hookrightarrow$ komponenty souvislosti grafu $G=(V,E)$ jsou třídy ekvivalence $\sim$

$\hookrightarrow$ respektive indukované podgrafy  $\rightarrow$ 2 komponenty souvislosti:

$\hookrightarrow$ graf je souvislý pokud má jen jednu komponentu souvislosti



Definice nejkratší cesty mezi vrcholy grafu

$G=(V,E)$, kde $x,y \in V$, pak vzdálenost

$\uparrow$
nejkratší

$d(x,y)$ $\begin{cases} \text{počet hran} \\ \text{pro stejné} \\ \text{komponentě} \\ \infty \\ \hookrightarrow \text{v různých} \\ \text{komponentách} \end{cases}$

platí: pro $G=(V,E)$

a) $d(x,y) \geq 0$

b) $d(x,y)=0 \iff x=y$

c) $d(x,y)=d(y,x)$

d) $\forall x,y,z : d(x,z) \leq (d(x,y) + d(y,z))$

Definice okolí vrcholu

↳ Necht' $G = (V, E)$, $v \in V$

↳ okolí $N(v) = \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$ → množina všech vrcholů, se kterými
sousedí hranou

↳ k -lé okolí $N^k(v) = \{u \in V : d(u, v) \leq k\}$ → prostě vrcholy s menší
vzdáleností než k

↳ $N^1(v) = N(v) \cup \{v\}$ → $k(1)$ -lé okolí, patří sem i ten sám vrchol

Definice stupně vrcholu

↳ $\deg(v) = |N(v)|$ → nebo-li počet sousedů → $\text{soused} : \{u, v\} \in E$ a $u \text{ sousedí s } v$
→ stupeň vrcholu je velikost jeho okolí nebo-li
v kolika hranách se vyskytuje

Definice matice sousednosti

$A \in \mathbb{Z}_2^{m \times m}$ $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

↳ je symetrická podle hlavní diagonály → $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$

↳ na diagonále má samé nuly → $\{v_i, v_i\} \notin E$

Definice matice incidence

↳ řádky odpovídají vrcholům a sloupce hranám a pokud má ta hrana, pak
je sem 1

Úvaha: Princíp sudosti

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Dôkaz:

- ↳ každá hrana má dva konce.
- ↳ $\sum_{v \in V} \deg(v) \rightarrow$ počítá konce hran
- ↳ $2 \cdot |E| \rightarrow$ taký počítá konce hran

Dôsledok:

- ↳ Vrcholy s lichým stupňom je sudý počet

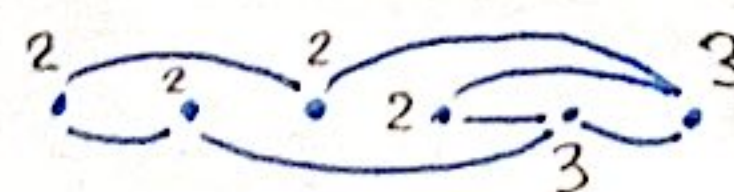
Definícia skóre grafu

- ↳ skóre grafu s vrcholy $v_1, v_2, \dots, v_n$ je postupnosť
 $(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n))$
- ↳ Dve skóre jsou realizovateľné práve vtedy keď vzniknú z druhého prevozným
- ↳ ukážka

 $\rightarrow (0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3)$

Úloha: Je to skóre grafu?

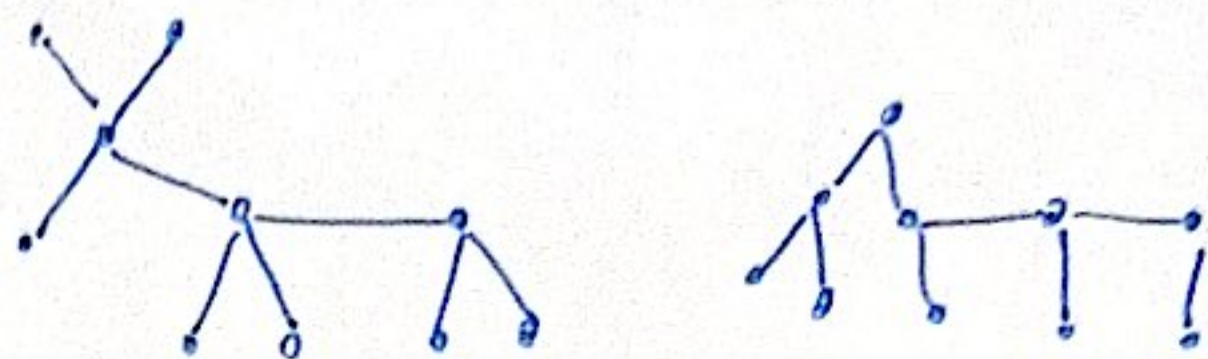
$(0, 1, 2, 4, 5) \rightarrow$ nie, vrchol nemôže mať stupeň 5, môže mať maximálne 4

$(2, 2, 2, 2, 3, 3) \rightarrow$  $\rightarrow$ ANO, JDE

$(2, 2, 2, 3, 3, 3) \rightarrow$ NE, pretože lichých stupňov musí byť sudý počet

Definice stromu

ukážka:



↳ Graf $G=(V,E)$ je strom $\Leftrightarrow$

• $\leftarrow$ izolovaný vrchol, tedy strom

1. je minimálně souvistý $\rightarrow$ lze se dostat mezi všemi vrcholy jednoduchou cestou

$\rightarrow$ odebráním hrany přestane být souvislý

2. je acyklický $\rightarrow$ neobsahuje kružnice

Definice lesa

↳ Graf $G=(V,E)$ je les $\Leftrightarrow$ každá jeho komponenta souvislosti je strom

Definice listu

↳ Je-li graf $G=(V,E)$ strom, pak $v \in V: \deg(v)=1$ je list

Lemma o počtu listů (o koncovém vrcholu)

↳ Pokud graf $G=(V,E)$ je strom a $|V| \geq 2$, pak platí:

$$\exists u, v: u \neq v \wedge \deg(u) = \deg(v) = 1$$

↙ prostě obsahuje list

↳ v podstatě strom s více než dvěma vrcholy má alespoň 2 listy

Důkaz:

Necht' $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ je nejdelší cesta ve stromu G . Pak v_0 i v_n jsou listy. Pokud by např. v_0 nebyl list, tak $\deg(v_0) \geq 2$ a existuje $v \neq v_1: \{v_0, v\} \in E$

1) $v \in \{v_2, \dots, v_n\} \rightarrow$ graf G není strom, má kružnici

2) $v \notin \{v_2, \dots, v_n\} \rightarrow$ cesta se prodlouží, spor s tím, že Λ_0 je nejdelší cesta

Definice smazání vrcholu

Pokud $G=(V,E)$ je graf a $v \in V$, pak $G-v$ odstraní vrchol v množiny V a všechny jeho hrany

Formálně: $G-v = (V \setminus \{v\}, E \cap \binom{V \setminus \{v\}}{2})$

↳ musí být minimálně 2 vrcholy

Věta o postupně výslabě stromů

↳ jinak by neměl list stejné

Pokud $G=(V,E)$ je strom a $v \in V: \deg(v)=1$ („ v je list“) a $|V| \geq 2$. Pak ekvivalentně

1) G je strom

2) $G-v$ je strom

Důkaz:

$1 \Rightarrow 2$

Předpokládám, že G je strom, pak $G-v$ je strom

- V $G-v$ existují vrcholy $u, w \in G-v$ a potřebujeme najít cestu. G je souvislý, a proto mezi u, w existuje cesta, kde vrcholy na cestě mají $\deg(v_i) \geq 2$

Proto když odebereme list v s $\deg(v)=1$, tak cestu neporušíme a $G-v$ je taky souvislý

- Když vezmu graf, co nemá kružnici a smažu z něj vrcholy, tak výsledný graf bude také acyklický

$2 \Rightarrow 1$

Předpokládám, že $G-v$ je strom, pak G je strom

- Pokud $G-v$ nemá kružnici, tak ji nevytvoříme přidáním vrcholu stupně 1

- $\rightarrow$ má druhé stromě:

• pokr. důkazem

↳ ověření, že G souvislý. Necht' u, w jsou vrcholy, mezi kterými provede cesta:

a) $u \neq v$ a $w \neq v \rightarrow$ cesta uvnitř, tak se nic nemění přidáním vrcholu v

b) $u = v$ v $w = v \rightarrow$ jedním z konců cesty je přidáný vrchol v s $\deg(v) = 1$, ale
pak platí že $v \in G-v$ je jeho soused a tam už cesta
vede

Věta o charakterizaci stromů

Pro $G = (V, E)$ je ekvivalentní:

1. G je strom

2. $\forall u, v \in V: \exists!$ cesta z u do v (jednoznačnost cesty)

3. minimálně souvislý graf : $\forall e \in E: G - e$ nesouvislý
 $\hookrightarrow$ odeberu hranu

4. maximálně acyklický graf: G nemá kružnice a přidáním libovolné hrany kružnice vznikne

$$\forall x, y \in V: \{x, y\} \notin E \wedge G + \{x, y\} = (V, E \cup \{x, y\})$$

$\hookrightarrow$ vznikne kružnice

5. eulerův vzorec : G je souvislý a platí $|V| = |E| + 1$

platí $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$ „Předpoklad, že G je strom, pak existuje jednoznačná cesta z u do v “

$\hookrightarrow$ Pro spor: „ G je strom a existují dvě cesty z u do v “. Vezmeme proto nejmenší index vrcholu, který se liší, tam se rozcházejí a pak se opět sejdou a to vytvoří kružnici, což je spor s předpokladem, že G je strom.

$2 \Rightarrow 3$ „Předpoklad, že existuje jednoznačná cesta, pak G je minimálně souvislý graf“

$\hookrightarrow$ Pro spor: „jednoznačná cesta a G není minimálně souvislý“

Pak mezi x a y b.ú.n.o. $\{x, y\} \in E$ a tato hrana je spojuje. A necht' odebereme tuto hranu je $G - e$ souvislý. Tak pak je to spor s předpokladem, že existuje jednoznačná cesta.

3 $\Rightarrow$ 4 „Předpoklad, že minimální souvislý, pak maximální acyklický“

$\hookrightarrow$ Pro spor: „Minimální souvislý a G obsahuje kružnici“

$\hookrightarrow$ Pak existují 2 cesty z u do v , kde $u, v \in V$, což je spor s jedinečností cesty

4 $\Rightarrow$ 1 „Předpoklad, že G je max. bez kružnic, pak G je strom“

$\hookrightarrow$ Necht' $x, y \in V$, pak buď $\{x, y\} \in E$, pak vedle cesty. Ak pokud $\{x, y\} \notin E$,

pak přidáním $\{x, y\}$ vznikne kružnice, a proto v grafu mimo kružnici vedla cesta.

1 $\Rightarrow$ 5

MI podle vrcholů

1) $|V|=1 \rightarrow$ pak $|V|=|E|+1 \rightarrow 1=0+1 \rightarrow 1=1 \checkmark$

2) $|V| \geq 2$

$\hookrightarrow$ existuje list a můžeme ho odebrat $G-v = (V', E') : |V'| = |V|-1 \wedge |E'| = |E|-1$

$|V'| = |E'| + 1 \leftarrow$ ještě platí pro $G-v$

$(|V|-1) = (|E|-1) + 1 \Rightarrow |V| = |E| + 1$, platí i pro G , má o 1 hranu a 1 vrchol více

5 $\Rightarrow$ 1

platí $|E| = |V|-1$, pak G je strom $\rightarrow$ stačí dokázat jeho souvislost

$\hookrightarrow$ kdyby graf měl kružnici, pak jde odebrat hrana a souvislost zůstane, což je

spor s minimálním počtem hran, tedy s $|E| = |V|-1$

Definice kostry grafu

Pokud $G=(V,E)$ je souvislý, pak kostra H je: $\rightarrow H=(V,E')$, kde $E' \subseteq E$

- podgraf se všemi vrcholy
- H je strom

Algoritmus nalezení kostry (Kruskalův)

$$E = \{e_1, \dots, e_m\}$$

$$E_0 = \emptyset$$

pro $i = 1, \dots, m$ projdu a zjistím jestli $(V, E_{i-1} \cup \{e_i\})$ obsahuje

kružnici: pokud ne: $\rightarrow E_i = E_{i-1} \cup \{e_i\}$

pokud ano: $\rightarrow E_i = E_{i-1}$

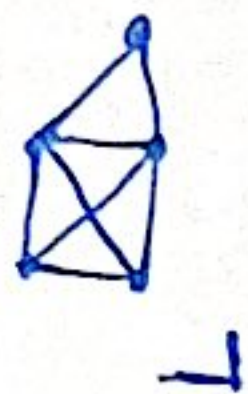
(V, E_m) je kostra grafu $G=(V,E)$

$\hookrightarrow$ prostě projdu všechny hrany a zjistím, jestli vytvořili kružnici nebo ne

Definice eulerovského tahu

↳ posloupnost $v_0, e_1, v_2, \dots, e_k, v_k$, kde $v_0 = v_k$, takže je uzavřený, jednoduše projít celý graf jedním tahem bez opakování hran, ale můžeme se opakovat vrcholy

↑ např.



↳ pokud má graf eulerovský tah, pak je eulerovský

↳ jak zjistit?

- G musí být souvislý
- všechny vrcholy mají sudý stupeň $\forall v \in V: \exists k \in \mathbb{N}_0 : \deg(v) = 2k$

Důkaz:

↳ prvním (a tedy posledním) vrcholem vedou min. 2 hrany z a do a
to platí i pro všechny ostatní vrcholy

Věta o charakterizaci eulerovských grafů

$G=(V,E)$ je eulerovský $\Leftrightarrow G$ je souvislý a všechny stupně jsou sudé

Důkaz:

$\Rightarrow$

první vrchol má sudý stupeň, protože jím vyjdeš z a do min. 2 hrany
a musíme se dostat na každý vrchol, aby platil eulerovský tah

$\Leftarrow$

Předpoklad, že G je souvislý graf se všemi vrcholy sudého stupně

Necht' $T = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_m, v_m) \rightarrow$ je tah (sled, kde se neopakuje hrany)
 $\rightarrow$ maximální možné délky

1) $v_0 = v_m$

$\hookrightarrow$ pokud $v_0 \neq v_m \rightarrow$ tah tah pozřel lichý počet hran končící ve v_m , ale
ten má sudý stupeň, a proto tah není maximální délky
a dá se prodloužit, sprotivě předpokladem maximální délky

2) $\{v_0, \dots, v_m\} = V$

$\hookrightarrow$ pokud to není pravda, tak existuje nepovíztý vrchol v G a o ten lze tah
prodloužit

3) T obsahuje všechny hrany

$\hookrightarrow$ pokud ne, tak opět je možné tah o tuto hranu prodloužit

Definice orientovaného grafu

↳ orientovaný graf $G=(V,E)$, kde $E \subseteq V \times V$ hrany jsou uspořádané dvojice

↳ prvky E jsou tzv. orientované hrany nebo řínky

Definice orientovaného tahu

↳ je posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_m, v_m$, kde $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ jsou orientované hrany

↳ to samé platí pro orientovanou cestu, kde se jen neopakuje vrcholy navzájem od tahu

Definice orientovaného eulerovského grafu

↳ je graf $G=(V,E)$, co obsahuje eulerovský tah, který:

- obsahuje všechny vrcholy
- každou hranu právě jednou
- je uzavřený

Věta o charakterizaci orientovaných eulerovských grafů

↳ $\deg^-(v) \rightarrow$ počet hran, co končí ve v , $\deg^+(v) \rightarrow$ počet hran, co začíná ve v

↳ $\text{sym}(G) \rightarrow$ symetrizace, vytvoření z orientovaného $\triangleleft G=(V,E)$ neorientovaného $G=(V,E')$

$$\rightarrow E' = \{ \{u,v\} : (u,v) \in E \vee (v,u) \in E ; u \neq v \}$$

↳ Orientovaný graf je eulerovský $\Leftrightarrow \text{sym}(G)$ je souvislý a třet: $\deg^+(v) = \deg^-(v)$

Definice rovinného grafu

↳ rovinné grafy → lze namalovat do roviny bez křížení hran

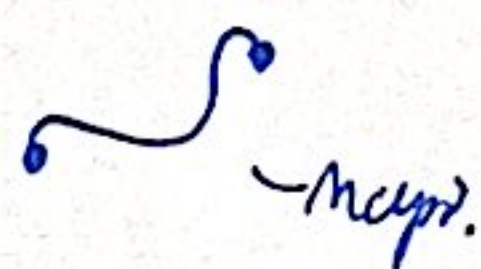


Definice oblouku a jeho koncových bodů

↳ je podmnožina roviny ve tvaru $f([0,1])$, kde $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tedy

je to spojitá a prostá funkce

↳ nelze se



např.



↳ není, protože není prostá

↳ koncové body jsou: $f(1)$ a $f(0)$

→ $\forall e \in E: \forall v \in V: \forall t \in [0,1]: f(0) \neq f(t)$

↳ prostě prostá

Definice topologické kružnice → spojení oblouků

↳ $f([0,1])$, kde $f([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$ a je spojitá a prostá na $[0,1)$, tedy

$f(0) = f(1)$ → koncové body jsou stejné



např.



Definice rovinného nakreslení → pokud je graf rovinný má rovinné nakreslení

↳ rovinné nakreslení grafu $G=(V,E)$ je prosté zobrazení $b: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ a

systém oblouků $\{c_e: e \in E\}$

• $\forall e \in E$: pokud $e = \{u, v\}$, pak c_e má konce $b(u)$ a $b(v)$

• $\forall e \in E: \forall w \in V$: pokud w není konec hrany, pak c_e neobsahuje $b(w)$

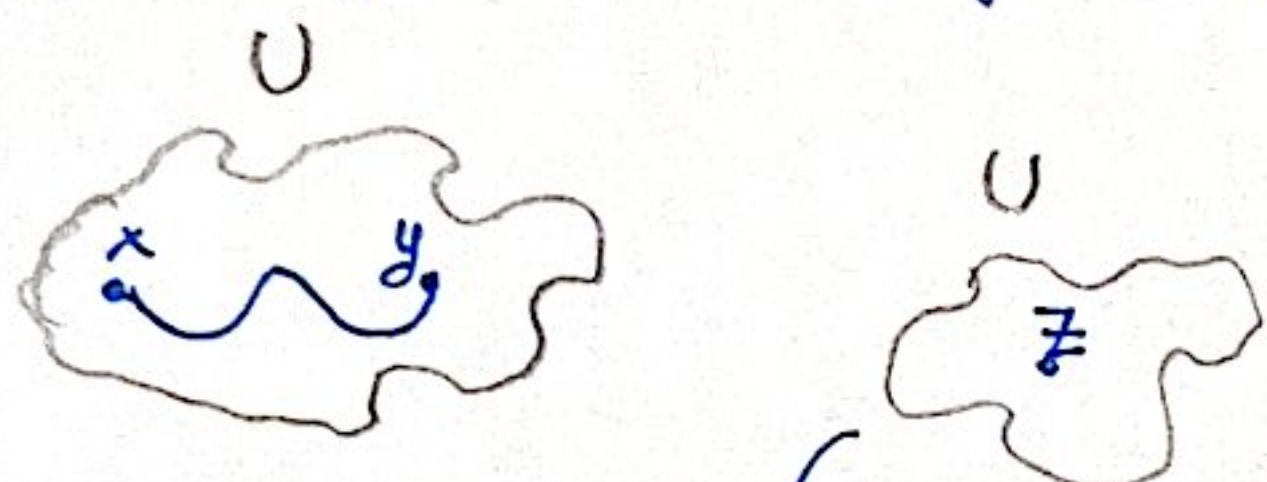
• $e \neq e' \rightarrow$ nejma koncových bodů se c_e a $c_{e'}$ nepřekrývají

Definice relace dosažitelnosti

↳ Pokud $U \subseteq \mathbb{R}^2$, pak $\approx$ relace dosažitelnosti na U je

definovaná $x \approx y \iff \exists c_e : c_e \subseteq U \wedge e = \{x, y\}$

↳ pokud existuje oblouk, co má koncové body x a y



$x \approx y$ ale x nebo y není v relaci s z

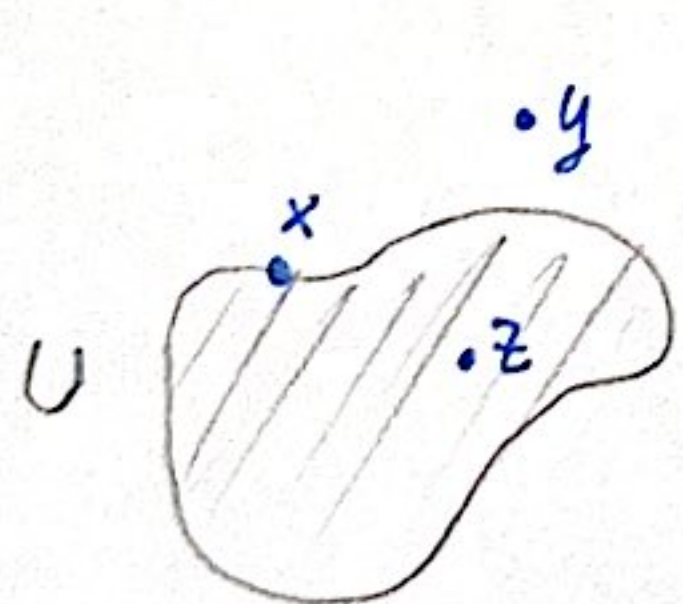
↳ $\approx$ je ekvivalence

Definice komponenty obloukové souvislosti

↳ jsou to třídy ekvivalence $\approx$

↳ to U máhoře má 2 komponenty obloukové souvislosti

Definice bodu na hranici



$\rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$

$\rightarrow x$ je na hranici $\rightarrow$ pokud bod je na hranici, pak každý

kruh se středem v tom bodě obsahuje body uvnitř i mimo množinu U

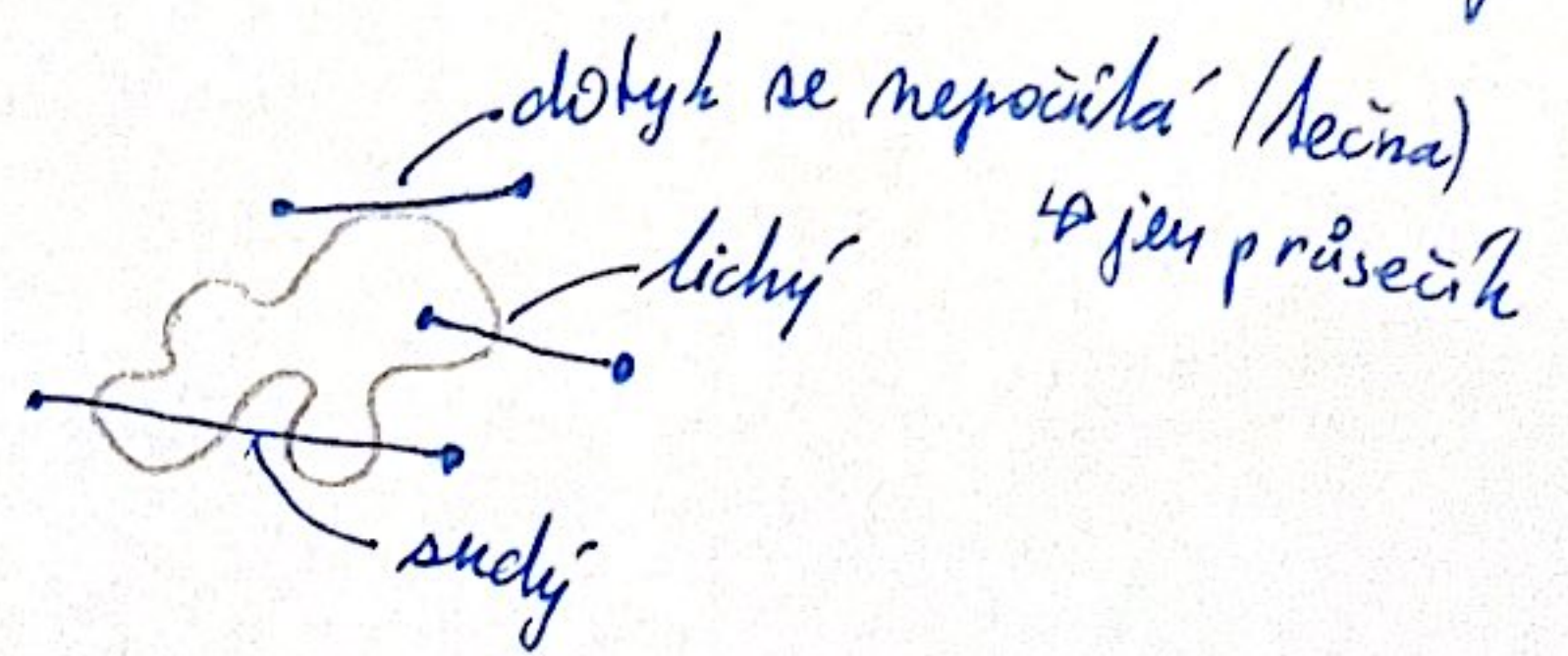
Jordanova věta o kružnici

↙ 2 komponenty souvislosti

Všechny topologické kružnice dělí rovinu na 2 části → vnitřek a vnějšek

↳ počet průsečíků

- lichý (různé části)
- sudý (stejně části)



Definice stěny rovinného nakreslení

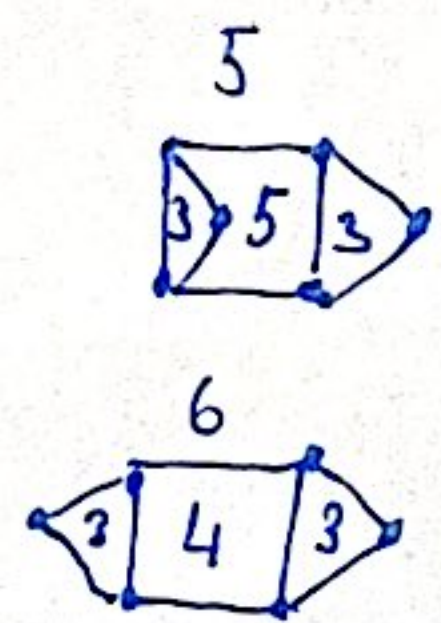
↳ stěny rovinného nakreslení jsou komponenty oblohové souvislosti

množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{e \in E} c_e \right)$

↳ vlastně rozdělím plochu na menší plochy pomocí topologických kružnic
a ta menší plocha je stěna

↳ je to vlastnost rovinného nakreslení a ne grafu

↳ jediná vnější stěna je neomezená



K_5 ani $K_{3,3}$ není rovinný

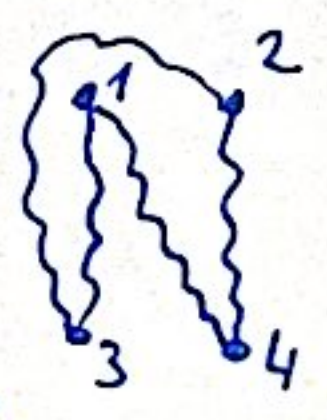
K_5 není rovinný (jako důsledek Jordanovy věty)

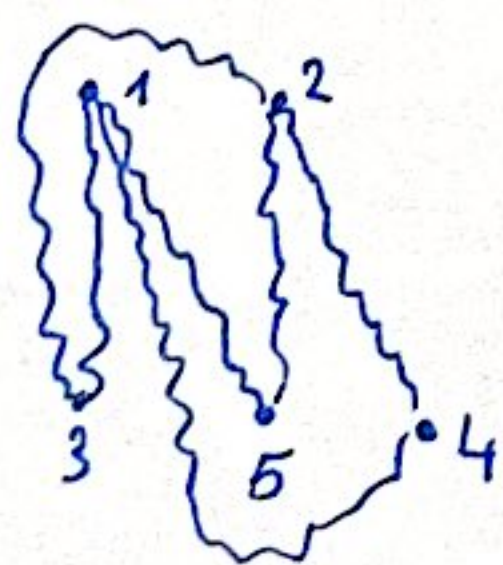
↳ Sporem: Nakreslíme rovinný K_3  a podle Jordanovy

věty, tak tato topologická kružnice dělí rovinu na vnitřek a vnějšek, proto 4. vrchol lze přidat ven i dovnitř, B.Ú.N.O. 

Toto rovinné nakreslení dělí rovinu na 4 stěny nebo-li obloukové komponenty souvislosti a vrchol 5 lze stejně jako minule přidat do kterékoliv z nich, ale tímto se spojí jen s 3 vrcholy v dané stěně a už nebude nakreslit hranu s 4. vrcholem bez prolnutí. Nakřesťme spore, že by K_5 šlo rovinně nakreslit

$K_{3,3}$ není rovinný

↳ stejným způsobem, sporem. Nakreslíme $K_{2,2}$  . Rozdělí se mi rovina na dvě stěny a B.Ú.N.O. přidám do jedné party vrchol 5 a do vnitřku

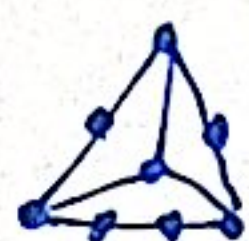


. Pak dostanu rozdělení na 3 stěny a nastal stejný problém, že nemůžu umístit vrchol 6, aby měl hranu se všemi vrcholy z druhé party

Definice dělení grafu

↳ G je graf G' , co vznikne, když do mělkých hran přidáme nové vrcholy (aspoň 0 nových vrcholů) $\rightarrow G$ je dělení grafu G'

↳ např. K_4



↳ dělení grafu K_4

G je rovinný $\Leftrightarrow G'$ je rovinný

┌ Příklad: (H je podgraf G a H není rovinný) $\Rightarrow G$ není rovinný ┘

↳ Důkaz: (Úporem) Předpoklad, že G je rovinný, pak odeberu hrany a vrcholy a dostanu zase rovinný graf, tedy podgraf H , který bude rovinný, což je spor s předpokladem, že H není rovinný

Kuratowského věta

$\hookrightarrow G$ je rovinný $\Leftrightarrow$ neobsahuje jako podgraf žádné dělení K_5 ani $K_{3,3}$

$\hookrightarrow$ tedy dělení isomorfní s K_5 nebo $K_{3,3}$

Důkaz:

$\Rightarrow$ Jestliže je G rovinný, pak neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$

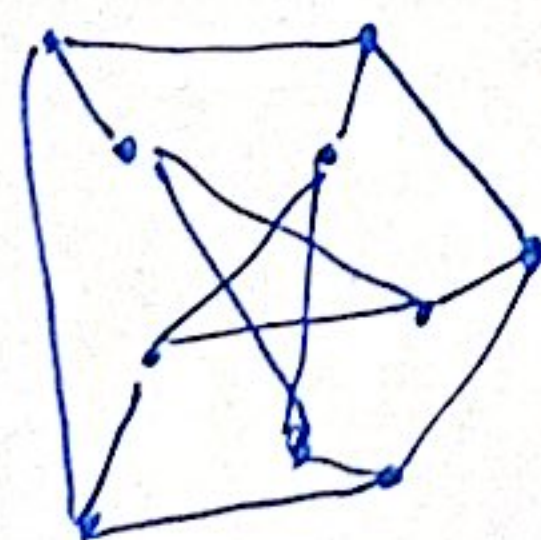
$\hookrightarrow$ 1. K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné

$\hookrightarrow$ 2. Dělení hran mění rovinnost

$\hookrightarrow$ 3. Podgraf rovinného grafu je rovinný $\rightarrow$ obdrží hran ^(nebo vrcholy) se nepokazí rovinnost

$\hookrightarrow$ 4. Kdyby G měl jako dělení podgraf K_5 nebo $K_{3,3}$, pak by to byl spor s tím, že G je rovinný

$\Leftarrow$ (netřeba)



$\hookrightarrow$ Petersenův graf, obsahuje podgraf $K_{3,3} \rightarrow$ není rovinný

Věta: Eulerova Formule

Lemma o počtu vrcholů, hran a stěn:

- Pokud G obsahuje kružnici, pak podle Jordanovy věty má toto nakreslení alespoň 2 stěny.
- Platí to i naopak: Necht' F je stěna nakreslení grafu G . Pokud má nakreslení alespoň 2 stěny, pak F je ohraničena kružnicí nebo-li na hranici stěny F leží hranice s rovinným nakreslením kružnice. $\perp$

↳ Důsledek: Yilovolné rovinné nakreslení stromu má jen jednu stěnu

Eulerova Formule

Každé rovinné nakreslení grafu G má $|E| - |V| + 2$ stěn

Důkaz: MI dle $|E|$. Uvažováno rovinné nakreslení G a s.je počet stěn.

1) $|E| = 0$

↳ G souvislý a nemá hrany, pak existuje jen jeden $\rightarrow |V| = 1$, proto jen spočítáme $|E| - |V| + 2 = 0 - 1 + 2 = 1 = \Delta$

2) $|E| > 0$

↳ pokud G neobsahuje kružnici, je to strom. A platí $|E| - |V| + 2 = -1 + 2 = 1 = \Delta$

eulerův vzorec $|V| = |E| + 1$ z dualizace stromu

↳ pokud G obsahuje kružnici, tak se rozdělí na 2 stěny a pokud odebereme hranu, tak se to slije do jedné stěny a pomocí indukčního předpokladu lze říct, že pro G' platí $|E'| - |V'| + 2 = \Delta$, ale G má o jednu stěnu více, pak: $|E| - |V| + 3 = |E| - 1 - |V| + 3 = |E| - |V| + 2 \Leftarrow$ PLATÍ

Eulerova Formule pro rovinný graf s k komponentami souvislosti

↳ komponenta souvislosti je maximální souvislá část grafu

$$\underline{|V| - |E| + \Delta = k + 1}$$

↳ např. pro 1 komponentu souvislosti $\rightarrow |E| - |V| + 2 = 1$ nebo-li eulerova
formule

pro rovinný souvislý graf

↳ např. 2 komponenty souvislosti:



$$|V| - |E| + \Delta = k + 1$$

$$k = 2 \quad 7 - 7 + 3 = 2 + 1 \quad \checkmark$$

$$|V| = 7$$

$$|E| = 7$$

$$\Delta = 3$$

↳ není třeba dokazovat

Věta (horní mez na počet hran rovinného grafu)

↳ Necht' $G = (V, E)$ je rovinný graf, kde $|V| \geq 3$. Pak platí $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$

Věta č. 2: Pokud $G = (V, E)$ je rovinný a $|V| \geq 3$ a neobsahuje C_3 jako podgraf, pak $|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$

Důkaz:

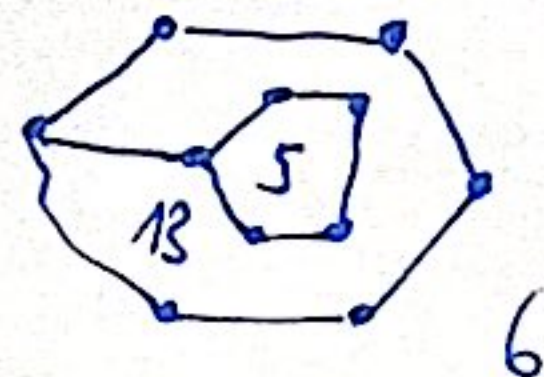
↑ pomocí lemmatu: Pokud G je rovinný a obsahuje kružnici, pak každá stěna hraničí s alespoň 3 hranami → např. C_3  a hrana s 2 stěnami logicky.

Pokud G obsahuje kružnici

↳ množina hran a stěn: $\{e, F\} : e \in E \text{ a } F \text{ stěna, co hraničí s touto hranou}\}$

↳ a_i → počet hran na hranici stěny i

↳ s → počet stěn



$$\sum_{i=1}^s a_i = 2 \cdot |E| \geq 3 \cdot s \rightarrow \text{protože každá stěna hraničí s alespoň 3 hranami}$$

↳ protože každý počet hran všech stěn a každá hrana sousedí s

$$3 \cdot s \leq 2 \cdot |E| \quad (\text{dosaďme eulerovu formuli } |V| - |E| + s = 2 \text{ } \overset{s=k+1}{\text{2 stěnami}})$$

$$3 \cdot (2 + |E| - |V|) \leq 2 \cdot |E|$$

$$6 + 3|E| - 3|V| \leq 2 \cdot |E|$$

$$\underline{|E| \leq 3|V| - 6}$$

pro větu č. 2:

$$2 \cdot |E| \geq 4 \cdot s \quad \text{protože tam není } C_3$$

$$4 \cdot (2 + |E| - |V|) \leq 2 \cdot |E|$$

$$4 + 2|E| - 2|V| \leq |E|$$

$$\underline{|E| \leq 2|V| - 4}$$

Pokud G neobsahuje kružnici

$$|E| = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = |V| - k \leq \underbrace{|V| - 1}_{|V|-1} \leq 3 \cdot |V| - 6$$

↓ bez C_3
pro k jen jinak
↓ absolut

$$|V| - 1 \leq 3 \cdot |V| - 6 \Rightarrow 5 \leq 2|V| \Rightarrow \frac{5}{2} \leq |V| \Rightarrow |V| \geq 3$$

↑

$|E| = |V| - 1$ pro strom a to je silnější pro k komponent, kde každá komponenta má n_i vrcholů

Rovinný graf obsahuje vrchol stupně ≤ 5 (≤ 3 bez C_3)

↳ důsledek přechodové věty

↳ Průměrný stupeň v grafu $G \Rightarrow \frac{\sum d_i}{|V|} = \frac{2 \cdot |E|}{|V|} \leq \frac{2 \cdot (3 \cdot |V| - 6)}{|V|} = 6 - \frac{12}{|V|} \leq 6$

$d_i \rightarrow$ stupeň vrcholu v_i
protože každá hrana má 2 konce

↳ takže existuje i $d_i < 6$ nebo-li $d_i \leq 5$

↳ bez C_3

$$\frac{\sum d_i}{|V|} = \frac{2 \cdot |E|}{|V|} \leq \frac{2 \cdot (2 \cdot |V| - 4)}{|V|} = 4 - \frac{4}{|V|} \rightarrow d_i < 4 \text{ nebo-li } d_i \leq 3$$

Definice obarvení grafu

↳ obarvení grafu $G = (V, E)$ pomocí k barev je funkce $b: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$

a $\forall u, v \in V: \{u, v\} \in E \Rightarrow b(u) \neq b(v)$

↔ dobré k -obarvení

↳ k -obarvitelný

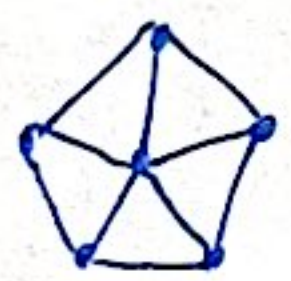
↳ pokud existuje obarvení G pomocí k barev

↳ barvnost

↳ je nejmenší k takové, že graf G je k -obarvitelný

↳ $\chi(G) \rightarrow$ značení

┌ příkážka:

$G: \text{} \rightarrow \chi(G) = 4 \rightarrow$ protože vrchol sousedí s dalšími 3 vrcholy vždy

$\chi(G) = 1 \iff G \cong E_n$ (přímá hrana)

$\chi(G) = 2 \iff G$ je bipartitní

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n \text{ sudé} \\ 3 & n \text{ liché} \end{cases}$$

$\chi(K_n) = n$ (každý vrchol musí dostat unikátní barvu) $K_n \rightarrow$ taký n ↖ pro graf s podgrafem

Definice klikovosti

↳ klikovost $G = (V, E)$ je $\omega(G) = \max \{n \in \mathbb{N} : K_n \subseteq G\}$

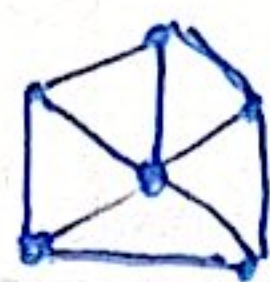
↳ vlastně největší n takové, že K_n je podgraf G

↳ $\chi(G) \geq \omega(G)$

↳ pro klikovost platí implikace $K_n \subseteq G \Rightarrow \chi(G) \geq n$

↳ opačná implikace $\chi(G) \geq n \Rightarrow K_n \subseteq G$ neplatí

↳ protipříklad:



$$\rightarrow \chi(G) = 4$$

$$\omega(G) = 3$$

→

Lemma

G je bipartitní $\Leftrightarrow G$ nemá jako podgraf lichou kružnici

Barvnost je nejméně tak velká jako klikovost

$$\text{Věta: } \chi(G) \geq \omega(G)$$

Důkaz:

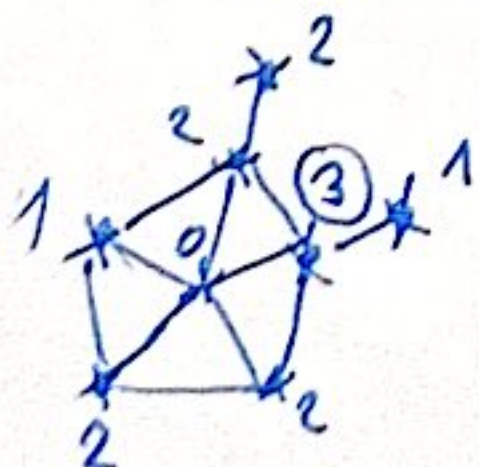
Protože $\omega(G) = \max \{n \in \mathbb{N} : K_n \subseteq G\}$, tak když je úplný graf podgrafem G , tak je ho třeba obarvit n barvami a K_n a se celého grafu může být barvnost větší

Definice k-degenerovaného grafu

↳ Pokud každý podgraf grafu G má vrchol stupně $\leq k$, pak je graf G k -degenerovaný

$$\forall H = (V', E') : \exists v \in V' : \deg(v) \leq k$$

↳ zjistíme tím, že postupně odebíráme vrcholy s nejvyšším stupněm a pak vezmeme ten nejmenší z nich



Lemma: Pokud G je k -degenerovaný, pak platí $\chi(G) \leq k+1$

Důkaz: MI dle $|V|=n$

1) $n=1 \rightarrow G \cong K_1$, tedy $\chi(G)=1$

2)

$G' = G - v$ odeberu vrchol s nejmenším stupněm

G' je podgraf G , a proto je také k -degenerovaný

↳ z indukčního předpokladu plyne, že existuje obarvení $c: V(G') \rightarrow \{1, \dots, k+1\}$ o $k+1$ barvách

↳ odebraný vrchol v má nejvýše k sousedů, a proto lze obarvit $k+1$ -ou barvou

↳ různé sousedé nemají stejnou barvu a $\chi(G) \leq k+1$ platí

↳ např. strom je 1-degenerovaný, takže pro G strom $\rightarrow \chi(G) \leq 2$

Tvrzení: Každý rovinný graf je 5-degenerovaný $\rightarrow \forall G=(V,E)$ rovinný: $\exists v \in V: \deg(v) \leq 5$

Důkaz:

platí $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$, kde $|V| \geq 3$

Úvaha:

$$\forall v \in V: \deg(v) \geq 6$$

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6 \cdot |V| \Rightarrow |E| \geq 3 \cdot |V|, \text{ což je spor s vztahem}$$

korní mezi počtu hran
rovinného grafu

Věta o 4 barvách

- ↳ Pro každý rovinný G platí $\chi(G) \leq 4$, dokázáno počítačem
- ↳ Pro $\chi(G) \leq 6$ bylo, že rovinný graf je 5-degenerovaný

Věta o 5 barvách

↳ Pro každý rovinný G platí $\chi(G) \leq 5$

Důkaz: Indukcí podle vrcholů

1) Pokud G má ≤ 5 vrcholů, tak každý dostane jinou barvu

2)

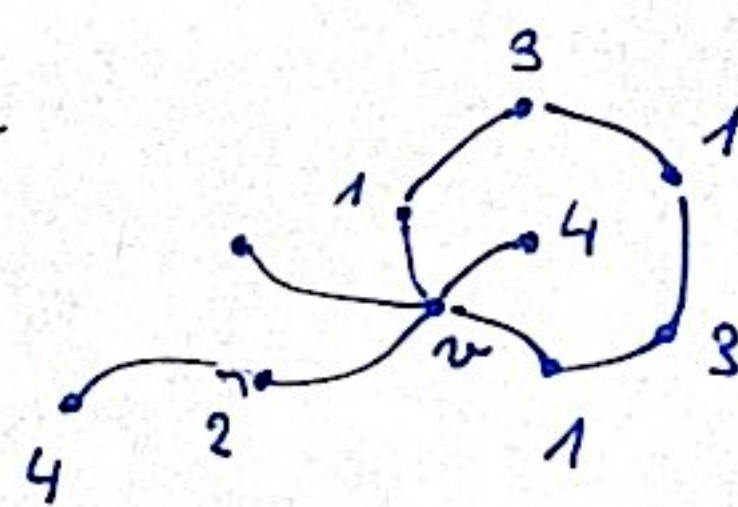
G má více vrcholů. Každý rovinný graf je 5-degenerovaný.

Odebereme vrchol v ^{$\deg(v) \leq 5$} a vznikne graf G' , který obarvíme podle indukčního předpokladu 5 barvami

Nyní dobarvení vrcholu v :

- $\deg(v) < 5 \rightarrow$ na sousedech je méně než 5 barev, použije se ta poslední
- $\deg(v) = 5$ a na sousedech je < 5 barev $\rightarrow$ opět obarvíme nepoužitou barvou.
- $\deg(v) = 5$ a na sousedech je 5 barev $\rightarrow$ snahu obarvení předefinovat, aby na sousedech byly max. 4 barvy

↳ indukovaný podgraf, kde se střídají barvy 1 a 3, pokud v různých komponentách souvislosti, tak jistou přehodit, ale pokud ne a tvoří cestu, tak s vrcholem v



vytvoří topologickou kružnici. A pak existuje cesta od barev 2 a 4, ale by mělo tu kružnici přetnout a jeden vrchol je uvnitř a druhý vně (Jordanova věta) a pak tedy nemůže střídát barvy, a proto v lze obarvit jinou,

↳ protože jsou v jiných komponentách souvislosti např. barva 4 pokud přehodíme barvy v komponentách souvislosti

↑
Kempova věta = ty dvoubarvené cesty

Důkaz č. 2 → pomocí kontrakce hrany (o 5 barvách)

def. kontrakce hrany $V(\tilde{G}) = (V(G) \setminus \{u, v\}) \cup \{z\}$

$$E(\tilde{G}) = \left(E(G) \cap \binom{V(G) \setminus \{u, v\}}{2} \right) \cup \{ \{z, t\} : t \notin \{u, v\} \wedge (\{u, t\} \in E(G) \vee \{v, t\} \in E(G)) \}$$

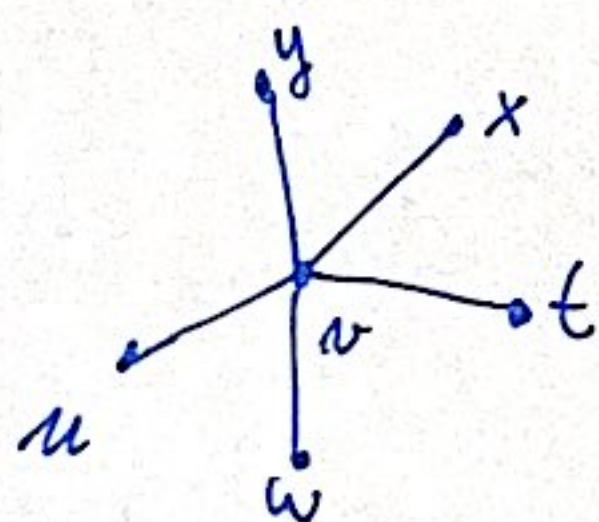


Důkaz: MI dle $|V| = n$

IP: tvrzení platí na všech grafech s $\leq n-1$ vrcholy
 pokud $n \leq 5$, tak snadno ověříme, jak v důkazu č. 1
 předpokládejme, že $\deg(v) = 5$

↳ mysl.

G:



↳ dvojice vrcholů?

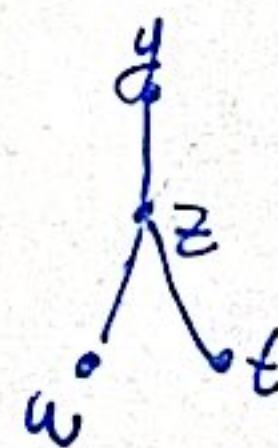
↔ nespojuje všechny vrcholy hrana, protože by pak G nebylo rovinný

↔ existují 2 vrcholy, co nejsou spojené hranou

↔ kontrahují hrany BÚNO $\{x, v\}$ a $\{u, v\}$

↳ teď už to obarvíme jte, x a u dostanou obarvení nové b'

↳ v pak dostane obarvení co nemají ostatní vrcholy



Definice konečného pravděpodobnostního prostoru

trojice (Ω, F, P)

$\Omega \rightarrow$ množina elementárních jevů

$F \rightarrow$ přípustné jevy $F \subseteq P(\Omega)$ ^{$\leftarrow$ potenční množina} v pravd. prostoru

$P: F \rightarrow [0, 1]$

$F = P(\Omega)$ $\leftarrow$ v konečném pravd. prostoru

Klasický pravděpodobnostní prostor

elementární jev je takový výsledek, že při elementárním pokusu nastane jen jeden náhodně

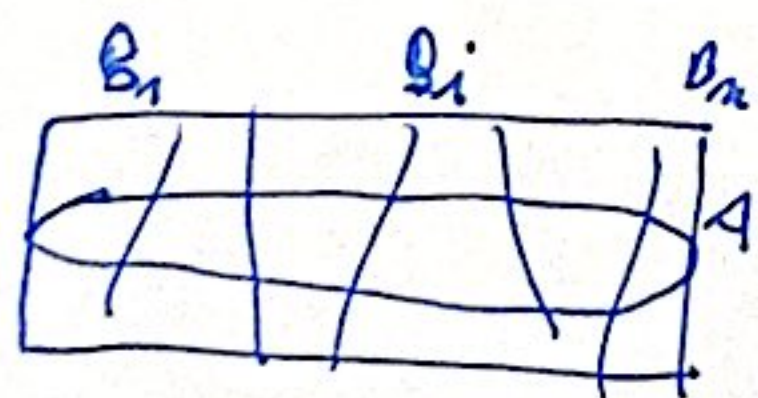
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$\rightarrow$ každý elementární jev má stejnou pravděpodobnost

Definice podmíněné pravděpodobnosti

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Věta o úplné pravděpodobnosti



$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Bayesova věta

$B_1, \dots, B_n$ je rozklad Ω a $\forall i: P(B_i) > 0$

$$P(B_k | A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

Nezávislé jevy

A, B jsou nezávislé pokusy $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

obecně : $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

Definice náhodné veličiny na prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

Funkce $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Definice střední hodnoty náhodné veličiny

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega)$$

Linearita střední hodnoty

$$E[X+Y] = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega) + P(\{\omega\}) \cdot Y(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega) +$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot Y(\omega) = E[X] + E[Y]$$

$$E[\alpha \cdot X] = \sum_{\omega \in \Omega} \alpha \cdot P(\{\omega\}) \cdot X(\omega) = \alpha \cdot \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega) = \alpha \cdot E[X]$$

$P(\{\omega: X(\omega) \leq 10\})$ se značí $P(X \leq 10)$

Definice indikátoru jvu

indikátor jvu A je náh. veličina $I_A: \Omega \rightarrow [0,1]$

$$I_A(\omega) \begin{cases} 1 & \text{pokud } \omega \in A \\ 0 & \text{pokud } \omega \notin A \end{cases}$$

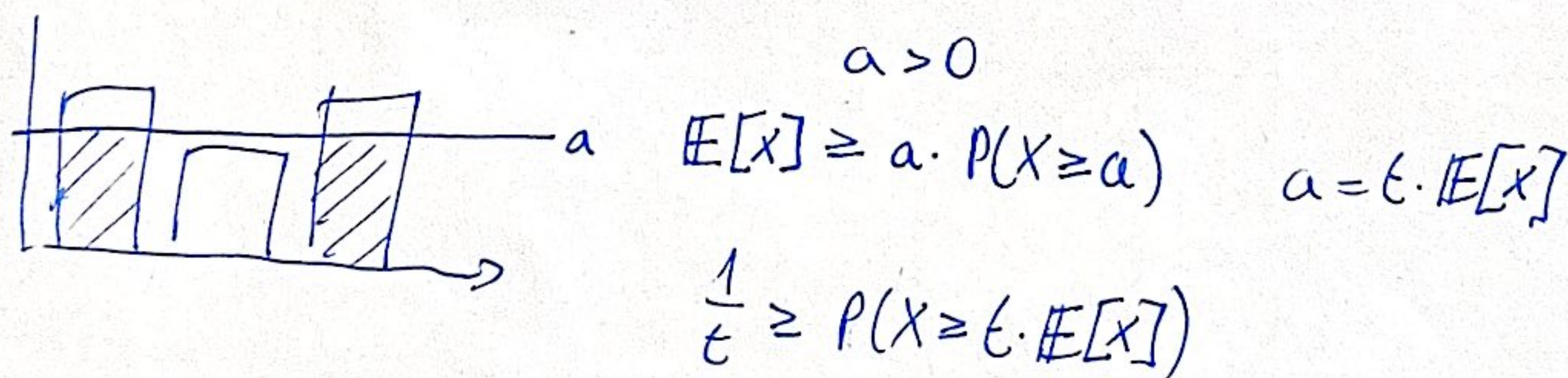
Definice rozptylu

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

Markovova nerovnost $\rightarrow$ velké hodnoty nemohou nastávat často

Pro nezápornou náhodnou veličinu platí $\frac{1}{t} \geq P(X \geq t \cdot E[X])$

Důkaz: (obrázkem)



Formálně:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_b b \cdot P(X=b) = \sum_{b < a} b \cdot P(X=b) + \sum_{b \geq a} b \cdot P(X=b) \geq \sum_{b \geq a} b \cdot P(X \geq b) \geq \\ &\geq \sum_{b \geq a} a \cdot P(X=b) = a \sum_{b \geq a} P(X=b) = a \cdot P(X \geq a) \end{aligned}$$

Chebysheva nerovnost

Podmínka $a > 0$ a $\text{Var}(X) \neq 0$

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

Důkaz:

$$Y := (X - \mathbb{E}[X])^2 \geq 0$$

$$\mathbb{E}[Y] = \text{Var}(X)$$

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) = P(Y^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a^2} = \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$